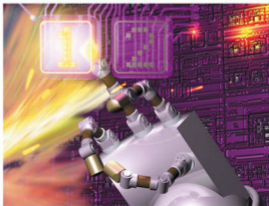


Vogel Fachbuch

Schiessle (Hrsg.)  
Wolf / Linser / Vogt

# Mechatronik 1



Edmund Schiessle (Hrsg.)  
Friedrich Wolf/Jörg Linser/Alois Vogt  
Mechatronik 1

Prof. Dipl.-Phys. Dipl.-Ing. Edmund Schiessle (Hrsg.)

Prof. Dipl.-Ing. Friedrich Wolf

Prof. Dipl.-Ing. Jörg Linser

Dipl.-Ing. Alois Vogt

# **Mechatronik 1**

Vogel Buchverlag

Prof. Dipl.-Phys. Dipl.-Ing. EDMUND SCHIESSLE (Hrsg.)  
Jahrgang 1946, studierte nach seiner Lehre und  
Industrietätigkeit als Elektronikmechaniker an der  
Fachhochschule München Maschinenbau, danach an  
den Universitäten München und Tübingen Physik mit  
Nebenfach Elektronik. Ab September 1979 war er als  
Elektronik-Entwicklungsingenieur auf dem Gebiet der  
Messwertaufnahme und Sensorentwicklung im Elektronik-  
Messzentrum der Daimler Benz AG (Mercedes-Benz AG)  
tätig. Während dieser Zeit entstanden eine Reihe von  
Patenten auf dem Gebiet der Sensor- und Elektrotechnik.  
Zusätzlich war er in der beruflichen Aus- und Weiterbildung  
der Fa. Mercedes-Benz AG als Referent und Koordinator  
für Kurse über elektrische Messtechnik zuständig.  
Seit März 1991 ist er Professor für Grundlagen der  
Elektrotechnik, Elektrische Messtechnik und Sensorik im  
Studiengang Mechatronik an der Fachhochschule Aalen.  
Prof. Schiessle verfasste Kapitel 1 und 4 sowie  
die Abschnitte 2.1 bis 2.3 und 2.7

Prof. Dipl.-Ing. F. Wolf (Abschnitte 2.4 bis 2.6 und Kapitel 3)  
Prof. Dipl.-Ing. J. Linser (Abschnitte 5.10 und 5.11)  
Dipl.-Ing. A. Vogt (Abschnitte 5.1 bis 5.9)

---

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

**Mechatronik / hrsg. von Edmund Schiessle.** – Würzburg : Vogel  
1. / Von Friedrich Wolf .... – 1. Aufl. – 2002  
ISBN 3-8023-1860-9

---

ISBN 3-8023-1860-9

1. Auflage. 2002

Alle Rechte, auch der Übersetzung, vorbehalten. Kein Teil  
des Werkes darf in irgendeiner Form (Druck, Fotokopie,  
Mikrofilm oder einem anderen Verfahren) ohne schriftliche  
Genehmigung des Verlages reproduziert oder unter  
Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt  
oder verbreitet werden. Hiervon sind die in §§ 53, 54 UrhG  
ausdrücklich genannten Ausnahmefälle nicht berührt.

Printed in Germany

Copyright 2002 by Vogel Industrie Medien GmbH & Co. KG,  
Würzburg

Umschlaggrafik: Michael M. Kappenstein, Frankfurt

Herstellung: dtp-project Peter Pfister,

97222 Rimpar-Maidbronn

# Vorwort

In vielen Bereichen des Ingenieurwesens vollzieht sich seit nahezu 20 Jahren ein großer technologischer Wandel. In rasch zunehmendem Maße gewinnen Elektronik und Informationstechnik an Einfluss auf die technischen Produkte und damit auf die klassischen Methoden und Arbeitsweisen in den einzelnen klassischen Fachdisziplinen. Betrachtet man z.B. die Entwicklung des Maschinenbaus, der Feinwerktechnik oder des Fahrzeugbaus, so erkennt man eine immer höhere Konzentration und Integration der Elektronik und Informatik in den einzelnen Maschinen, Geräten und Fahrzeugen.

Überwiegend mechanisch ausgerichtete Unternehmen schätzen, dass sich der Anteil der Mechanik an den Herstellkosten ihrer Produkte in den nächsten 5 bis 10 Jahren von ca. 90 auf ca. 50% verringern wird. Immer wichtiger werden dagegen Elektronik und Software. Ihr Anteil beträgt schon heute ca. 10 % der Herstellungskosten. In Zukunft wird dieser Anteil auf über 40 % steigen. Bewertet man einzelne technische Baugruppen auf ihre Funktionalität, so wird die weiter steigende Wertschöpfung gegenüber der Wertigkeit der Mechanik noch deutlicher.

Um die technischen Herausforderungen der Zukunft meistern zu können, müssen deshalb die traditionellen Grenzen der Ingenieurtechnik überschritten werden.

Als neuartige interdisziplinäre Ingenieurwissenschaft und Technologie vereint die Mechatronik nun Elemente der traditionellen Disziplinen Maschinenbau, Elektrotechnik und Informatik. Sie wird überall dort gebraucht, wo durch intelligente Verknüpfungen der einzelnen Teildisziplinen eine Steigerung der Gesamtfunktionalität erreicht werden soll. In den neuen mechatronischen Produkten bilden also die mechanischen Systeme, Sensoren, Aktoren und Mikrorechner sowie die zugehörige Software ein technisch aktives oder kürzer ein mechatronisches System. Der Integrationsgrad mechatronischer Systeme geht so weit, dass einzelne Teilsysteme ohne die jeweils anderen Teilsysteme nicht arbeitsfähig sind und die Gesamtfunktion nur durch das ideale Zusammenwirken aller Teilfunktionen realisiert werden kann. So kann z.B. bei Werkzeugmaschinen eine hohe Bearbeitungsgenauigkeit erst dann wirtschaftlich erreicht werden, wenn alle Unzulänglichkeiten in der mechanischen Struktur durch eine geeignete Sensorik erkannt und durch eine intelligente Informationsverarbeitung korrigiert wird. Mit dieser Maßnahme kann der Aufwand bei der Entwicklung und der Fertigung der Maschine deutlich reduziert werden. Mechatronik ist also die Basis für neue, intelligent gesteuerte und geregelte technische Produkte mit gesteigerter Funktionalität, höherer Zuverlässigkeit und höherer Wirtschaftlichkeit. Um die Zusammenhänge ver-

stehen zu können, haben wir nun die mathematischen, physikalischen und technischen Grundlagen der einzelnen Fachgebiete in zwei Bänden zusammengestellt.

In Band 1 werden die allgemeinen mathematischen, physikalischen und technischen Grundbegriffe der Mechatronik, der Analog- und Leistungselektronik sowie der Sensoren und Aktoren behandelt.

Band 2 vermittelt die digitale Steuerungstechnik, die Regelungstechnik mit Optimierung, mechanische Mehrkörpersysteme sowie ein zeitgemäßes mechatronisches Anwendungsbeispiel und für die Regelungstechnik und die Mechanik von Mehrkörpersystemen wichtige mathematische Gesetzmäßigkeiten.

Die einzelnen Kapitel der beiden Bände können im fachlichen Zusammenhang oder auch als einzelne Kapitel – sozusagen fachspezifisch – gelesen werden. Die Stoffzusammenstellung entspricht den Vorlesungsinhalten, wie sie an der Fachhochschule Aalen im Studiengang Mechatronik gehalten werden. Das Buch dient auch Studenten/innen an Fachhochschulen und Universitäten sowie Technikern verschiedener Fachrichtungen, die sich mit Mechatronik weiterbilden oder in ihrer beruflichen Praxis damit befassen müssen.

Es werden Grundkenntnisse in Mathematik, Physik, Technische Mechanik und Elektrotechnik vorausgesetzt, wie sie im technischen oder physikalischen Grundstudium an einer Hochschule vermittelt werden.

Der Begriff «Mechatronics» wurde ursprünglich im Jahre 1969 von der japanischen Firma Yaskawa Electric Corporation erdacht und ab 1971 als Handelsname geschützt.

Die Autoren danken allen, die mit Informationen und kritischen Hinweisen mitgeholfen haben das Thema zu optimieren sowie dem Verlag für die Verwirklichung. Resonanz aus Leserkreisen ist uns immer willkommen!

E-Mail an: [edmund.schiessle@fh-aalen.de](mailto:edmund.schiessle@fh-aalen.de)

Aalen

Edmund Schiessle  
die Autoren

# Inhaltsverzeichnis

Vorwort	5
<b>1 Grundlagen</b>	<b>13</b>
1.1 Der Begriff Mechatronik und mechatronisches System	13
1.2 Grundbegriffe	14
1.2.1 Signale und Systeme	14
1.2.2 Statische und dynamische Eigenschaften mechatronischer Systeme	15
1.2.3 Stationäre und flüchtige Eigenschaften mechatronischer Systeme	15
1.2.4 Modell und Simulation	15
1.2.5 Linearisierung von Kennlinien	16
1.2.6 Linearisierung von Differentialgleichungen	16
1.2.7 Testfunktionen	17
1.3 Aufstellung und Lösung von linearen Differentialgleichungen im Zeitbereich	18
1.3.1 Aufstellen und Lösen einer linearen Differentialgleichung im Zeitbereich mit Testfunktionen	18
1.3.2 Übertragungsfunktion im Zeitbereich	23
1.3.3 Analogiebildung zwischen mechanischen und elektrischen Systemen	24
1.4 Aufstellung und Lösung linearer Differentialgleichungen im Frequenzbereich	27
1.4.1 Euler-Transformation	27
1.4.2 Aufstellen und Lösen linearer Differentialgleichungen für harmonische Vorgänge	28
1.4.3 Komplexer Frequenzgang	29
1.4.4 Ortskurve	30
1.4.5 Bode-Diagramm	31
1.4.5.1 Amplitudengang	31
1.4.5.2 Phasengang	32
1.4.5.3 Grafische Darstellung des Bode-Diagrammes	32
1.4.6 Technische Schwingungen	37
1.4.6.1 Technische Systeme mit kinematischer Kopplung	38
1.4.6.2 Technische Systeme mit dynamischer Kopplung	43
1.5 Instationäres Verhalten technischer Systeme	46
1.5.1 Komplexe Exponentialfunktion und die komplexe Frequenz	46
1.5.2 Komplexe Übertragungsfunktion (Systemfunktion)	49
1.5.3 Pole und Nullstellen	50
1.6 Laplace-Transformation	52
1.7 Zusammenfassung	54
<b>2 Analogelektronik</b>	<b>55</b>
2.1 Spannungsteiler	55
2.1.1 Unbelasteter fester Spannungsteiler	55
2.1.2 Unbelastete variable Spannungsteilerschaltung	56
2.1.3 Belasteter fester Spannungsteiler	57

2.1.4	Belasteter variabler Spannungsteiler (belastetes Potentiometer)	58
2.1.5	Frequenzkompensierter Spannungsteiler	58
2.2	Gleichstrombrückenschaltungen	60
2.2.1	Brückenschaltungen mit Konstantspannungsquellen	60
2.2.2	Brückenschaltungen mit Konstantstromquellen	64
2.3	Wechselstrombrückenschaltungen	66
2.4	Operationsverstärker	67
2.4.1	Allgemeines und Schaltsymbole des Operationsverstärkers	67
2.4.2	Spannungsversorgung (Stromversorgung, power supply)	68
2.4.3	Idealer und realer Operationsverstärker	69
2.4.3.1	Offsetspannung	71
2.4.4	Analoge Schaltungen mit Operationsverstärkern	72
2.4.4.1	Nichtinvertierender Verstärker	72
2.4.4.2	Impedanzwandler (Spannungsfollower)	72
2.4.4.3	Invertierender Verstärker	73
2.4.4.4	Strom/Spannungs-Wandler	73
2.4.4.5	Differenzverstärker (Subtrahierer)	74
2.4.4.6	Instrumentenverstärker	75
2.4.4.7	Addierer (Summierer)	75
2.4.4.8	Differentiator (Differenzierer)	76
2.4.4.9	Integrator (Integrierer)	77
2.4.4.10	Logarithmierverstärker	77
2.5	Analoge Filter	80
2.6	Umsetzer	86
2.6.1	Digital/Analog-Umsetzer	88
2.6.1.1	Digital/Analog-Umsetzung über PWM	92
2.6.2	Analog/Digital-Umsetzer	93
2.6.2.1	ADCs nach dem Zählverfahren	93
2.6.2.2	ADCs nach dem Wägeverfahren (SAR-Converter)	94
2.6.2.3	ADCs nach dem Parallelverfahren (Flash-Converter)	94
2.6.2.4	ADCs nach dem Kaskadenverfahren (Pipeline-Converter)	94
2.6.2.5	ADCs nach dem 1-Rampen-Verfahren (Single-Slope-Converter)	95
2.6.2.6	ADCs nach dem 2-Rampen-Verfahren (Dual-Slope-Converter)	95
2.6.2.7	ADCs nach dem Sigma-Delta-Verfahren ( $\Sigma$ - $\Delta$ -Converter)	95
2.7	Trägerfrequenzverstärker	96
<b>3</b>	<b>Leistungselektronik</b>	<b>103</b>
3.1	Steuerbare Leistungshalbleiter	103
3.2	Leistungsdioden	107
3.3	Anforderungen an die Ansteuerung der Leistungshalbleiter	108
3.4	Transistorschaltstufen	109
3.5	Ansteuerschaltungen für Leistungs-MOSFETs und IGBTs	109
3.6	Brückenschaltungen mit Transistoren	113
3.7	Endstufenansteuerung über PWM-Signal	115
<b>4</b>	<b>Sensoren</b>	<b>119</b>
4.1	Grundbegriffe	119
4.1.1	Signalformen	119
4.1.2	Vom Elementarsensor zum Sensorsystem	122
4.1.3	Messtechnische Eigenschaften von Sensoren	123
4.1.3.1	Messabweichung	123
4.1.3.2	Statische Eigenschaften	124
4.1.3.3	Dynamische Eigenschaften	129
4.1.4	Gesichtspunkte zur Auswahl von Sensoren	140



4.1.5	Eichen und Kalibrieren . . . . .	141
4.2	Mechanoresistive Sensoren . . . . .	142
4.2.1	Positionsesistive Messwertaufnehmer (oder potentiometrische Messwertaufnehmer) . . . . .	142
4.2.2	Dehnungsesistive Messwertaufnehmer . . . . .	145
4.3	Elektromagnetische Sensoren . . . . .	154
4.3.1	Induktionsmesswertaufnehmer . . . . .	154
4.3.1.1	Elektromagnetische Drehzahlafnehmer (Pick up) . . . . .	154
4.3.1.2	Elektrodynamische Schwingungsaufnehmer . . . . .	157
4.3.1.3	Differentialtransformator . . . . .	157
4.3.1.4	Resolver . . . . .	159
4.3.1.5	Inductosyn . . . . .	160
4.3.2	Induktive Messwertafnehmer . . . . .	160
4.3.2.1	Induktive Längsanker-Messwertafnehmer . . . . .	161
4.3.2.2	Induktive Queranker-Messwertafnehmer . . . . .	164
4.3.3	Wirbelstromafnehmer . . . . .	166
4.3.4	Näherungsschalter (Initiatoren) . . . . .	168
4.4	Magnetfeldsensoren . . . . .	171
4.4.1	Wiegand-Sensoren und Impulsdrähte . . . . .	171
4.4.2	Galvanomagnetische Sensoren . . . . .	173
4.4.2.1	Hall-Messwertafnehmer (Magnetoelektropotential-Elementarsensor) . . . . .	175
4.4.2.2	Feldplatten (magnetoresistive Elementarsensoren) . . . . .	179
4.4.2.3	Magnetoresistive Metall-Dünnschicht-Messwertafnehmer . . . . .	184
4.4.3	Magnetoinduktive Sensoren . . . . .	185
4.4.3.1	Magnetoinduktive Wegafnehmer . . . . .	185
4.4.3.2	Magnetoinduktive Drehzahlafnehmer . . . . .	189
4.4.3.3	Magnetoinduktive Stromafnehmer . . . . .	191
4.5	Magnetoelastische Sensoren . . . . .	191
4.5.1	Pressduktor . . . . .	192
4.5.2	Magnetoelastischer Induktivafnehmer . . . . .	193
4.5.3	Magnetoelastischer Druckafnehmer . . . . .	193
4.5.4	Magnetoelastischer Drehmomentafnehmer . . . . .	194
4.6	Kapazitive Sensoren . . . . .	197
4.6.1	Kapazitive Differentialwegafnehmer . . . . .	198
4.6.2	Kapazitive Druckafnehmer . . . . .	198
4.6.3	Kapazitiver Füllstandafnehmer . . . . .	199
4.6.4	Kapazitive Näherungsschalter . . . . .	201
4.6.5	Elektronische Signalanpassung . . . . .	203
4.7	Piezoelektrische Sensoren . . . . .	204
4.7.1	Piezoelektrische Afnehmer . . . . .	209
4.7.1.1	Piezoelektrische Kraftafnehmer . . . . .	210
4.7.1.2	Piezoelektrische Druckafnehmer . . . . .	210
4.7.1.3	Piezoelektrische Beschleunigungsaufnehmer . . . . .	211
4.7.1.4	Piezoelektrische Kraftdruckafnehmer . . . . .	212
4.7.2	Elektronische Signalanpassung . . . . .	213
4.8	Temperatursensoren . . . . .	217
4.8.1	Kontaktthermometrische Sensoren . . . . .	218
4.8.1.1	Widerstandsthermometer (thermoresistiver Elementarsensor) . . . . .	218
4.8.1.2	Thermoelemente . . . . .	221
4.8.2	Strahlungsthermometrie . . . . .	225
4.8.2.1	Gesamtstrahlungspyrometer . . . . .	225
4.8.2.2	Teilstrahlungspyrometer . . . . .	226
4.9	Optoelektronische Sensoren . . . . .	226
4.9.1	Fotoelektrische Empfänger (Messwertafnehmer) . . . . .	229

4.9.1.1	Fotozelle	229
4.9.1.2	Fotomultiplier (Sekundärelektronen-Vervielfacher)	230
4.9.1.3	Fotowiderstand	230
4.9.1.4	Fotodiode und Fotoelement	231
4.9.1.5	Positionempfindliche Fotodioden	234
4.9.1.6	CCD-Bildsensoren	235
4.9.2	Optische Sender	235
4.9.3	Lichtwellenleiter	235
4.9.4	Lichtoptische Sensoren	237
4.9.4.1	Lichtschränken	237
4.9.4.2	Reflexastköpfe	239
4.9.4.3	Inkrementale Sensoren	240
4.9.5	Hybridoptische Sensoren	242
4.9.6	Faseroptische Sensoren	245
4.10	Ultraschallsensoren	251
4.10.1	Physikalische Grundlagen	252
4.10.2	Ultraschallabstandssensoren	253
4.11	Pneumatische Sensoren	254
4.11.1	Staudruck-Messwertaufnehmer (Staudüse)	254
4.11.2	Ringstrahl-Messwertaufnehmer (Ringstrahldüse)	255
4.11.3	Pneumatische Luftschranken	256
<b>5</b>	<b>Aktoren</b>	<b>259</b>
5.1	Einführung in die Aktuatorik	259
5.1.1	Übersicht von physikalisch verschiedenen Aktoren	260
5.1.2	Definition eines Aktors	260
5.2	Festkörperaktoren: piezoelektrische und magnetostriktive Steller	262
5.2.1	Piezostelltechnik	262
5.2.1.1	Piezoeffekt und seine Eigenschaften	262
5.2.1.2	Hauptanwendungsgebiete	264
5.2.2	Grundlagen der Piezosteller	264
5.2.2.1	Ausdehnung des PZT – Nichtlinearität, Hysterese und Drift	265
5.2.2.2	Aktiv erzeugte Kraft	267
5.2.2.3	Dynamischer Betrieb, Resonanzfrequenzen und Zeitkonstanten	267
5.2.2.4	Temperaturverhalten	268
5.2.2.5	Erwärmung des Piezotranslators	269
5.2.2.6	Einsatz im Vakuum	269
5.2.2.7	Mechanische Einbauvorschriften	269
5.2.3	Ansteuerung von Piezotranslatoren	270
5.2.4	Positionsregelung mit Piezotranslatoren	270
5.2.5	Anwendungsbeispiele	270
5.2.5.1	Piezoelektrische Kippspiegel	270
5.2.5.2	Piezoelektrische Stelltische	272
5.2.5.3	Hexapod als Vibrationsisolator und Stellplattform	272
5.2.5.4	Piezowanderantrieb (Piezo-Walk-Drive, PWD)	274
5.2.6	Magnetostriktive Aktoren	274
5.2.7	Weitere Festkörperaktoren	276
5.2.8	Aktoren auf fluider und gasförmiger (chemischer) Basis	276
5.3	Elektromagnetisch-mechanische Aktoren	277
5.3.1	Einführung	277
5.3.2	Allgemeines über elektrische Antriebstechnik	278
5.3.3	Berechnung eines Hubmagneten	278
5.3.3.1	Durchflutungsberechnung	280
5.3.3.2	Hubmagnet-Kraftberechnung	283

5.3.4	Typen elektrischer Motoren	284
5.3.5	Gleichstrommotor (GSM)	284
5.3.5.1	Gleichstrom-Nebenschlussmaschine (GS-NSM)	285
5.3.5.2	Gleichstrom-Reihenschlussmaschine (GS-RSM)	285
5.3.5.3	Universalmotor	291
5.3.5.4	Elektronikmotor (EC-Motor)	291
5.3.5.5	Schrittmotor	297
5.3.6	Wechselstrom- und Drehstrommaschinen	301
5.3.6.1	Asynchronmaschine (ASM)	301
5.3.6.2	Synchronmaschine	302
5.3.7	Linearmotoren (LM)	302
5.3.8	Servoaktoren, Servomotoren für Servoantriebe	302
5.4	Arbeitspunkt im 4-Quadranten-Betrieb, Nennbetrieb und Typenschild	304
5.4.1	Definition des Begriffes Arbeitspunkt (AP) durch die Wirkungskausalkette	304
5.4.2	4-Quadranten-Betrieb	308
5.4.3	Nennbetrieb, Leistungs- bzw. Typenschild	309
5.4.4	Wirkungsgrad und Leistungsgrenzen	310
5.5	Leistungselektronische Umrichter für mechatronische Aktoren	311
5.5.1	Einleitung	311
5.5.2	Stromrichterschaltungen	312
5.5.2.1	Gleich-, Wechsel- und Umrichter	312
5.5.2.2	Zwischenkreisumrichter	312
5.5.2.3	Stromrichterspeisung für Synchron- und Asynchronmotoren	316
5.5.2.4	Pulsumrichter mit Spannungszwischenkreis	317
5.5.2.5	GTO-Stromrichter (Gate-Turn-Thyristor)	319
5.5.2.6	Direktumrichter	320
5.5.2.7	Untersynchrone Stromrichtererkaskade für Schleifringläufer (ASM-SRL)	323
5.5.2.8	Netzseitige Stromrichter	323
5.6	Projektierungsvorschläge	324
5.6.1	Nennleistung bzw. Bemessungsleistung	324
5.6.2	Drehmoment	324
5.6.3	Drehzahlstellbereich	325
5.6.4	Umgebungsbedingungen	326
5.6.5	Netzbedingungen	327
5.7	Zuverlässigkeit, Verfügbarkeit und Redundanz	328
5.7.1	Standardwerte zur Ausfall- und Verfügbarkeitsberechnung	328
5.7.2	Weitere Maßnahmen zur Erhöhung der Verfügbarkeit	329
5.7.3	Auswahlkriterien für Antriebssysteme	329
5.8	Dynamisches Verhalten, Hochlaufbetrieb und Thermodynamik	332
5.8.1	Newton'sches Aktionsprinzip	332
5.8.1.1	Linearer Hochlauf (Rampen-Zeit-Funktion)	333
5.8.1.2	Exponentieller Hochlauf	334
5.8.2	Thermodynamik, Erwärmung und Abkühlung	334
5.9	Normrichtlinien: Bauformen, Schutzarten, Kühlung und Isolation	337
5.9.1	Bauformen	337
5.9.2	Schutzarten, Schutzgrade	337
5.9.3	Kühlung	339
5.9.4	Isolation	339
5.10	Hydraulische Antriebstechnik	339
5.10.1	Übersicht	339
5.10.2	Grundlagen	340
5.10.3	Bauelemente hydrostatischer Antriebe	342
5.10.4	Ventile	344
5.10.5	Arbeitszylinder	347

5.10.6	Verbindungselemente	347
5.10.7	Dichtelemente	347
5.10.8	Hydrostatische Getriebe	347
5.10.9	Speicher	349
5.10.10	Bauelemente hydrodynamischer Antriebe	349
5.11	Pneumatische Antriebstechnik	353
5.11.1	Eigenschaften	354
5.11.2	Anwendungen	354
5.11.3	Bauelemente	354
<b>Literaturverzeichnis</b>		<b>357</b>
<b>Weiterführende Literatur</b>		<b>359</b>
<b>Stichwortverzeichnis</b>		<b>361</b>

# 1 Grundlagen

## 1.1 Der Begriff Mechatronik und mechatronisches System

Die **Mechatronik** fußt auf den klassischen Ingenieurwissenschaften und ist eine moderne, eigenständige, interdisziplinäre Ingenieurwissenschaft. Sie verbindet **Mechanik**, **Elektronik** und **Informatik**. Mechatronik ist nicht die klassisch betriebene Behandlung elektromechanischer Systeme, mit der additiven und meist nachträglichen Ergänzung passiver mechanischer Strukturen mit geregelten elektronischen Komponenten, sondern die von Beginn an integrierte und interdisziplinäre Projektierung, Konstruktion, Entwicklung und Fertigung hochkomplexer multitechnischer Systeme, Geräte und Anlagen. Aufgrund dessen ergeben sich ganz neue technische Möglichkeiten durch Verlagerung der technischen Funktionalität von passiven mechanischen Strukturen zu aktiven mechanischen Systemstrukturen. Sie sind gekennzeichnet durch einen sehr hohen Anteil elektronischer Komponenten in Verbindung mit intelligenter Sensorik und Aktorik sowie der zugehörigen systemnotwendigen Software. Aus dem oben dargestellten Text kann dann eine Definition für den Begriff «mechatronische Systeme», nach Meinung des Autors, wie folgt abgeleitet werden:

«**Mechatronische Systeme** bestehen immer aus integrierten mechanischen, sensorischen, aktorischen, informations- und leistungselektronischen Untersystemen, die zur Ausführung interner oder externer physikalisch-technischer Aktionen zielorientiert, softwaregestützt miteinander kommunizieren.»

- ❑ Beispiele für mechatronische Systeme in der Fahrzeugindustrie: elektronisches Motormanagement, Antiblockiersystem, Antischlupfregelung, Fahrdynamikregelung und Fahrkomfortregelung.
- ❑ Beispiele für mechatronische Systeme aus dem Maschinen- und Anlagenbau: weitgehend autonom arbeitende Roboter, Anlagen mit autonomen Einspannsystemen, sich selbst einstellende Werkzeuge und berührungsfrei geregelte Luft- oder Magnetlager.
- ❑ Beispiele für mechatronische Systeme aus der Elektronik- und Computerindustrie: neuartige Messgeräte und Messsysteme, Sensoren, Aktoren, Videorecorder, CD-Player, Camcorder, Videokameras, diverse Speichermedien, Laufwerke, Drucker, Plotter oder Kopierer.

Durch die Forderung nach immer weiterer Miniaturisierung mechatronischer Systeme, hat sich als neue interdisziplinäre Ingenieurwissenschaft die **Mikromechatronik** entwickelt. Sie ist eine Verbindung aus den technischen Disziplinen Mikromechanik, Mikroelektronik, Mikrosensorik, Mikroaktorik und Informatik. Sie kann damit auch als Teilgebiet der Mikrosystemtechnik angesehen werden.

## 1.2 Grundbegriffe

In diesem Abschnitt werden die technischen Begriffe Signal, System, Modell, Simulation, Kennlinie und Linearisierung besprochen.

### 1.2.1 Signale und Systeme

Signale sind zeitvariable Zustandsgrößen und dienen zur Darstellung von Informationen durch physikalische Größen. Sie liegen natürlicherweise zunächst als Zeitfunktionen vor. Zur theoretischen Untersuchung der Wirkung von physikalischen Zeitfunktionen auf technische Objekte (Sensoren, Messgeräte, Übertragungsgeräte, Anlagen usw.) ist es nützlich diese in Frequenzfunktionen zu transformieren und damit ihr Signalverhalten zu analysieren. Da die Reaktion der technischen Objekte auf Zeitsignale am Eingang mit einem Zeitsignal am Ausgang erfolgt, muss eine Rücktransformation der Frequenzfunktionen in die Zeitfunktionen vorgenommen werden. Für diese Transformationen werden, je nach Signalart, verschiedene mathematische Methoden benützt (Euler-Transformation, Fourier-Transformation, Laplace-Transformation, Z-Transformation). In Bild 1.1 ist eine systemtheoretische Systematik der Signale und der zugehörigen mathematischen Methoden dargestellt.

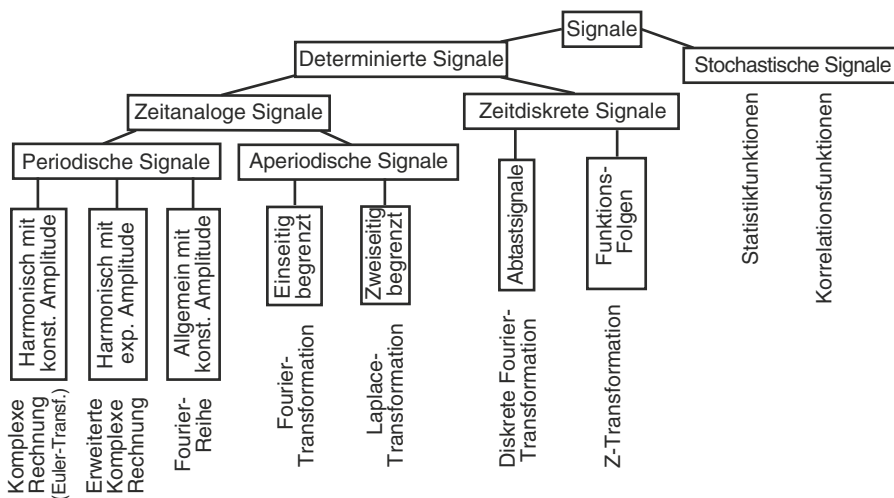
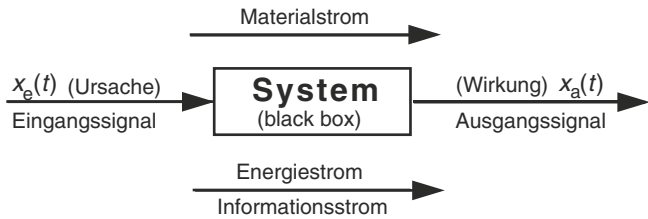


Bild 1.1 Physikalische Signale und mathematische Methoden

Bild 1.2  
Systemdarstellung als Block  
(black box)



Für die systemtheoretische Betrachtung des statischen und dynamischen Verhaltens von mechatronischen Systemen sind vor allem die funktionellen Abhängigkeiten zwischen den Eingangsgrößen (physikalische Wirkungen)  $x_a(t)$  und den Ausgangsgrößen (physikalische Ursachen)  $x_e(t)$  von Bedeutung. Die physikalische Abhängigkeit wird sinnbildlich durch einen Block (Bild 1.2) dargestellt. Jedem Signal wird eine gerichtete Wirkungslinie versehen mit einer Pfeilspitze zugeordnet. Der Systembegriff ermöglicht eine vereinfachte Darstellung komplizierter mechatronischer Geräte und Anlagen. Einzelsysteme lassen sich als Teilsysteme zu einem Gesamtsystem zusammensetzen und umgekehrt. Ein Vorteil ist, dass man aus den Strukturen der Teilsysteme wichtige allgemeine Schlüsse für das Verhalten des gesamten Systems ziehen kann und bereits erprobte Teilsysteme, baukastenähnlich für neuartige Systeme verwenden kann, wobei einzelne Teilsysteme nur geringfügig angepasst werden müssen.

### 1.2.2 Statische und dynamische Eigenschaften mechatronischer Systeme

Physikalische Eigenschaften, die keine Funktion der Zeit sind, nennt man statisch und solche, die eine Funktion der Zeit sind, nennt man dynamisch.

### 1.2.3 Stationäre und flüchtige Eigenschaften mechatronischer Systeme

Stationäre und statische Eigenschaften dürfen nicht verwechselt werden. Während statische Eigenschaften nicht von der Zeit abhängen, beschreiben stationäre Eigenschaften immer die zeitabhängig eingeschwungenen Eigenschaften technischer Systeme.

### 1.2.4 Modell und Simulation

Modelle von technischen Systemen sind funktionsorientierte, mathematische Nachbildungen durch ihre wichtigsten physikalischen Wirkungsstrukturen. Systeme übertragen Materie, Energie und Information oder wandeln verschiedene Energieformen in Informationen bzw. Informationen in verschiedene Energieformen um. Zur Bildung des mathematischen Modells werden für die physikalischen Wirkungsgrößen und die technischen Bauelemente idealisierte mathematische Eigenschaften definiert, die nur einen gewissen Bereich der Realität erfassen und damit eine begrenzte Gültigkeit besitzen. Das mathematische Modell stellt die Grundlage zur Entwicklung des Simulationsmodells dar. Die mathematische Beschreibung eines Systems über die funktionelle Ab-

hängigkeit zwischen der Ausgangs- und Eingangsgröße führt im Allgemeinen zu einer nicht linearen Differentialgleichung.

### 1.2.5 Linearisierung von Kennlinien

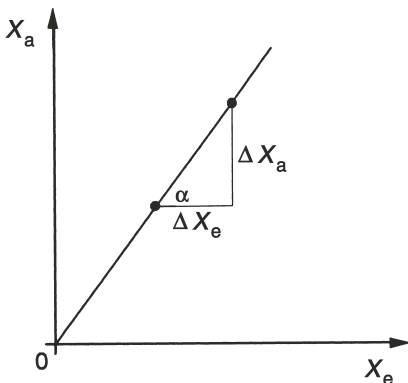
Das Übertragungsverhalten eines linearen Systems wird durch eine lineare Kennlinie (Bild 1.3a) und das Übertragungsverhalten eines nicht linearen Systems durch eine nicht lineare Kennlinie (Bild 1.3b) dargestellt. Die exakte mathematische Betrachtung nicht linearer Systeme wird hier nicht durchgeführt. Stattdessen wird die Übertragungskennlinie linearisiert. Das bedeutet, dass die gekrümmte Kennlinie im Arbeitspunkt «A» durch eine Tangente ersetzt wird (s. Bild 1.3b). In der Nähe des gewählten Arbeitspunktes «A» ist dann eine Linearisierung möglich.

### 1.2.6 Linearisierung von Differentialgleichungen

Wie oben schon gesagt, ist der Zusammenhang zwischen den Ausgangsgrößen  $x_a(t)$  und den Eingangsgrößen  $x_e(t)$  eines technischen Systems im Allgemeinen nicht linear. Die mathematische Beschreibung erfolgt daher mit Hilfe einer nicht linearen Differentialgleichung in der Form:

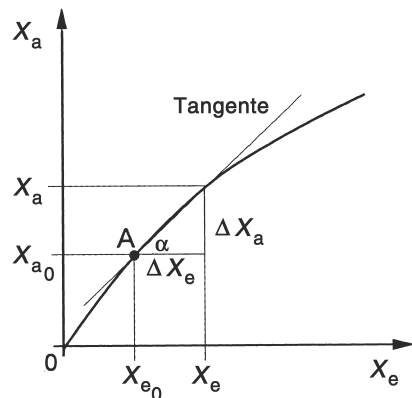
$$g(x_a(t), \dot{x}_a(t), \ddot{x}_a(t), \dots, x_e(t), \dot{x}_e(t), \ddot{x}_e(t), \dots) = 0 \quad (\text{Gl. 1.1})$$

Die nicht lineare Differentialgleichung wird, analog zur Kennlinie, durch die Linearisierung vereinfacht und damit leichter lösbar. Die Linearisierung erfolgt durch eine Taylor-Reihenentwicklung im durch den Index 0 gekennzeichneten Arbeitspunkt «A». Damit erhält man aus Gl. 1.1:



(a)

Bild 1.3a Lineare Kennlinie eines Systems



(b)

Bild 1.3b Nicht lineare Kennlinie eines Systems



$$\Delta g = \left( \frac{\partial g}{\partial x_a} \Big|_A \cdot \Delta x_a + \frac{\partial g}{\partial \dot{x}_a} \Big|_A \cdot \Delta \dot{x}_a + \frac{\partial g}{\partial \ddot{x}_a} \Big|_A \cdot \Delta \ddot{x}_a + \dots + \frac{\partial g}{\partial x_e} \Big|_A \cdot \Delta x_e + \frac{\partial g}{\partial \dot{x}_e} \Big|_A \cdot \Delta \dot{x}_e + \dots \right) = 0 \quad (\text{Gl. 1.2})$$

Die partiellen Ableitungen sind im Arbeitspunkt «A» zu bilden und können in diesem eingeschränkten Gültigkeitsbereich im Wesentlichen als konstant betrachtet werden. Damit kann man für die partiellen Ableitungen folgende konstante Ausdrücke definieren:

$$\frac{\partial g}{\partial x_a} \Big|_A \equiv a_0, \frac{\partial g}{\partial \dot{x}_a} \Big|_A \equiv a_1, \frac{\partial g}{\partial \ddot{x}_a} \Big|_A \equiv a_2, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_e} \Big|_A \cdot b_0, + \frac{\partial g}{\partial \dot{x}_e} \Big|_A \equiv b_1, \dots \quad (\text{Gl. 1.3})$$

Für die Ausgangsgrößenänderung gilt:

$$\Delta x_a = x_a - x_{a_0} \Rightarrow \Delta \dot{x}_a = \dot{x}_a - 0 \Rightarrow \Delta \ddot{x}_a = \ddot{x}_a - 0 \Rightarrow \dots, \text{ da } x_{a_0} = \textit{konst} \quad (\text{Gl. 1.4})$$

Für die Eingangsgrößenänderung gilt:

$$\Delta x_e = x_e - x_{e_0} \Rightarrow \Delta \dot{x}_e = \dot{x}_e - 0 \Rightarrow \Delta \ddot{x}_e = \ddot{x}_e - 0 \Rightarrow \dots, \text{ da } x_{e_0} = \textit{konst} \quad (\text{Gl. 1.5})$$

Setzt man Gl. 1.5, Gl. 1.4 und Gl. 1.3 in Gl. 1.2, erhält man die implizite linearisierte Differentialgleichung:

$$\Delta g = (a_0 \cdot \Delta x_a + a_1 \cdot \dot{x}_a + a_2 \cdot \ddot{x}_a + \dots + b_0 \cdot \Delta x_e + b_1 \cdot \dot{x}_e + b_2 \cdot \ddot{x}_e + \dots) = 0 \quad (\text{Gl. 1.6})$$

die Auflösung ergibt:

$$a_0 \cdot \Delta x_a + a_1 \cdot \dot{x}_a + a_2 \cdot \ddot{x}_a + \dots = b_0 \cdot \Delta x_e + b_1 \cdot \dot{x}_e + b_2 \cdot \ddot{x}_e + \dots \quad (\text{Gl. 1.6a})$$

wobei die rechte Seite das Eingangssignal (Ursache) und die linke Seite das Ausgangssignal (Wirkung) beschreibt.

### 1.2.7 Testfunktionen

Das Zeitverhalten technischer Systeme wird mathematisch und experimentell mit Hilfe von Testfunktionen und Testsignalen untersucht. Als Testfunktion werden besonders vorteilhaft Sprungfunktion (Bild 1.4), Impulsfunktion (Bild 1.5) und Sinusfunktion (Bild 1.6) verwendet. Diese Funktionen haben den Vorteil, dass Differentialgleichungen mit ihnen einfacher lösbar und technisch einfach darstellbar sind. So lässt sich z.B. die Sprungfunktion für elektrische Teilsysteme einfach durch Einschalten einer elektrischen Spannung realisieren, die Impulsfunktion für optoelektronische Teilsysteme mit einem Laserpuls oder die Sinusfunktion für mechanische Teilsysteme mit einem hydraulischen Schwingtisch.

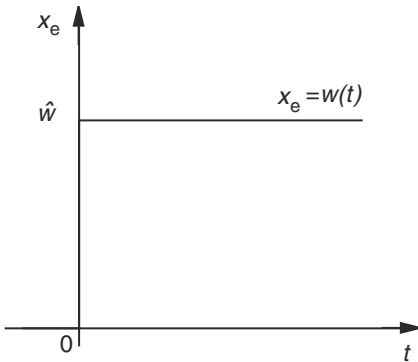


Bild 1.4 Sprungfunktion

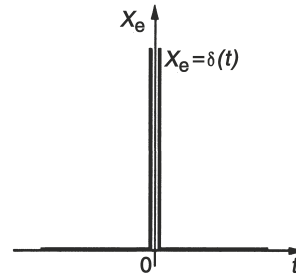
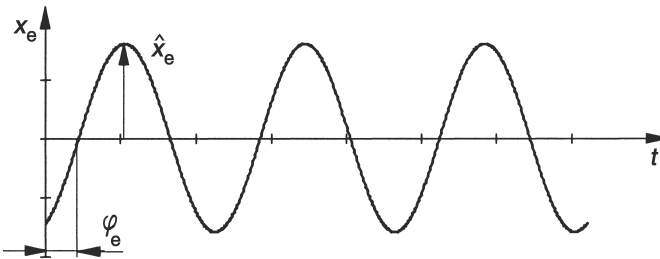


Bild 1.5 Impulsfunktion

$$x_e(t) = \hat{x}_e \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_e)$$

Bild 1.6  
Sinusfunktion



### 1.3 Aufstellung und Lösung von linearen Differentialgleichungen im Zeitbereich

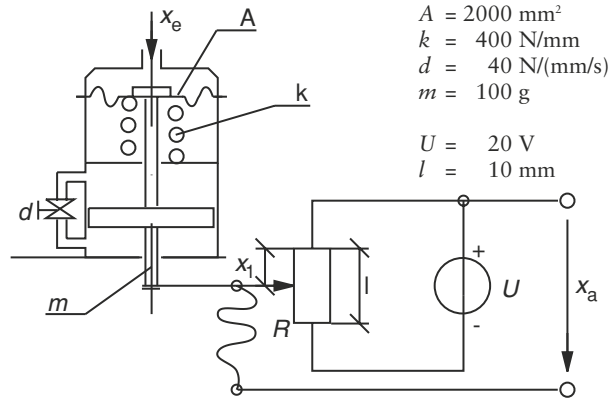
#### 1.3.1 Aufstellen und Lösen einer linearen Differentialgleichung im Zeitbereich mit Testfunktionen

Für die Aufstellung der Differentialgleichung müssen die physikalischen Gesetze, denen das System unterliegt, bekannt sein. Eingangs- und Ausgangsgrößen können sowohl nichtelektrische als auch elektrische Signale sein.

#### Beispiel: Elektropneumatischer Wandler

In Bild 1.7 ist das Funktionsprinzip eines elektropneumatischen Wandlers dargestellt, wobei alle physikalischen Größen konstruktionsbedingt in ein und dieselbe Raumrichtung wirken.

Bild 1.7  
Prinzipaufbau eines  
elektropneumatischen  
Wandlers



### Funktionsbeschreibung und Aufstellung der linearen Differentialgleichung

Die Eingangsgröße  $x_e(t)$  ist ein Gasdruck, der über die Membranfläche  $A$  eine mechanische Kraft  $F_e(t) = A \cdot x_e(t)$  erzeugt. Durch die Kraft wird die Kolbenstange um den Weg  $x_1(t)$  nach unten bewegt, wobei die Druckfeder um den Weg  $x_1(t)$  zusammengedrückt wird. Sie erzeugt die Federgegenkraft  $F_k(t) = k \cdot x_1(t)$ . Der Kolben der Dämpfungseinrichtung bewegt sich nach unten, wobei die unter dem Kolben befindliche Ölmenge über die Umwegleitung durch das Drosselventil nach oben befördert wird. Die Kraft  $F_d(t)$ , die notwendig ist um den Kolben zu bewegen, ist proportional zur Geschwindigkeit  $v_1(t)$ . Damit gilt  $F_d(t) = d \cdot v_1(t)$ . Weiter sind alle bewegten Teile massenbehaftet, sodass eine weitere Gegenkraft  $F_{Tr} = m \cdot a_1(t)$  entsteht, wobei  $m$  die Gesamtmasse der bewegten Teile ist. Aus der Mechanik ist der kinetostatische Ansatz zur Behandlung dynamischer Probleme nach D'ALEMBERT bekannt: Die Summe der resultierenden Kräfte muss gleich der Trägheitskraft sein. Damit gilt:

$$F_e(t) - F_k(t) - F_d(t) = F_{Tr}(t) \Rightarrow x_e(t) \cdot A - k \cdot x_1(t) - d \cdot v_e(t) = m \cdot a_1(t) \quad (\text{Gl. 1.7})$$

daraus erhält man für den elektropneumatischen Wandler eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$x_e(t) \cdot A = k \cdot x_1(t) + d \cdot \dot{x}_1(t) + m \cdot \ddot{x}_1(t) \quad (\text{Gl. 1.8})$$

Aus Bild 1.7 ist zu ersehen, dass die Kolbenstange über eine Querstange mit dem Schleifer eines Potentiometers verbunden ist. Das Potentiometer wird mit der elektrischen Spannung  $U$  einer Konstantspannungsquelle versorgt. Die Bewegung der Kolbenstange um den Weg  $x_1(t)$  bewirkt eine Verstellung des Schleifers um denselben Weg, die in eine dazu proportionale Spannung  $x_a(t)$  gewandelt wird. Mit Hilfe des elektrischen Spannungsteilergesetzes gilt dann:

$$\frac{U}{x_a(t)} = \frac{R}{R(x_1)} \Rightarrow \frac{U}{x_a(t)} = \frac{l}{x_1(t)} \Rightarrow x_1(t) = \frac{l}{U} x_a(t) \quad (\text{Gl. 1.9})$$

wobei  $l$  die Gesamtlänge der Widerstandsbahn des Linearpotentiometers ist.

Dieses Teilsystem heißt positionsresistiver Wegaufnehmer. Bei der Weiterverarbeitung der Spannung  $x_a(t)$  muss darauf geachtet werden, dass das nachfolgende elektrische Teilsystem einen im Verhältnis zum Potentiometerwiderstand sehr hohen Eingangswiderstand hat. Setzt man Gl. 1.9 in Gl. 1.8 erhält man:

$$A \cdot x_e(t) = k \cdot \frac{l}{U} \cdot x_a(t) + d \cdot \frac{l}{U} \cdot \dot{x}_a(t) + m \cdot \frac{l}{U} \cdot \ddot{x}_a(t) \quad (\text{Gl. 1.10})$$

durch Multiplikation mit  $U/(k \cdot l)$  und Umformung der Gl. 1.10 erhält man:

$$T_2^2 \cdot \ddot{x}_a(t) + T_1 \cdot \dot{x}_a(t) + x_a(t) = K \cdot x_e(t) \quad (\text{Gl. 1.11})$$

Mit den Koeffizienten

$$T_2^2 \equiv \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{m}{k}, T_1 = \frac{d}{k}, K = \frac{A \cdot U}{l \cdot k} \quad (\text{Gl. 1.12})$$

wobei  $\omega_0$  die Resonanzfrequenz,  $T_1$  die Zeitkonstante und  $K$  der Übertragungsfaktor ist.

### Lösung der Differentialgleichung mit Hilfe der Sprungfunktion als Testfunktion

Es interessiert der zeitliche Verlauf des Ausgangssignals  $x_a(t)$  in Abhängigkeit vom zeitlichen Verlauf des Eingangssignals  $x_e(t)$ . Als Eingangssignal verwenden wir die Sprungfunktion. Der Verlauf ist bereits in Bild 1.4 wiedergegeben. Mathematisch gilt dann:

$$x_e(t) \equiv w(t) = \begin{cases} \hat{w} & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases} \quad (\text{Gl. 1.13})$$

Setzt man die Sprungfunktion  $w(t)$  (Gl. 1.13) in die Differentialgleichung (Gl. 1.11) erhält man für  $t \geq 0$ :

$$T_2^2 \cdot \ddot{x}_{aw}(t) + T_1 \cdot \dot{x}_{aw}(t) + x_{aw}(t) = K \cdot \hat{w} \quad (\text{Gl. 1.14})$$

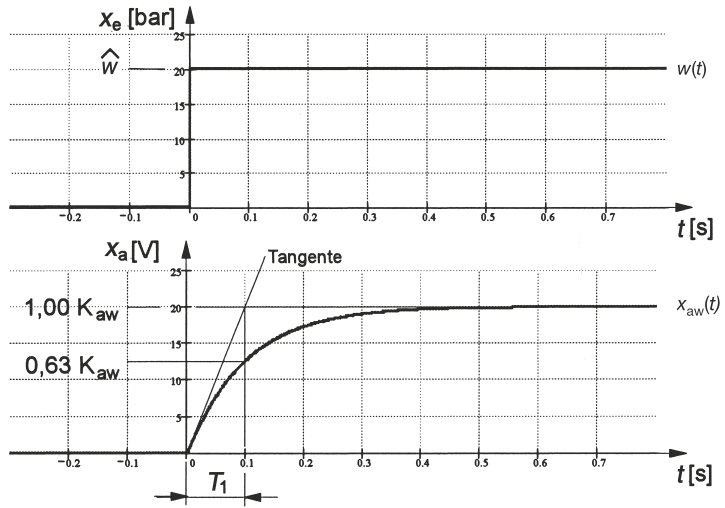
wobei  $x_{aw}(t)$  die Sprungantwort ist. Vereinfachend wird zunächst angenommen, dass die bewegliche Masse  $m$  vernachlässigbar ist. Dann gilt mit Gl. 1.14:

$$T_1 \cdot \dot{x}_{aw}(t) + x_{aw}(t) = K \cdot \hat{w} \quad (\text{Gl. 1.15})$$

man erhält also eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Aus der Mathematik der Differentialgleichungen ist bekannt,

Bild 1.8  
Sprungfunktion  
und Sprungantwort  
des elektro-  
pneumatischen  
Wandlers:  
a), b)

$$\begin{aligned}
 x_e(t > 0) &= \hat{w} \\
 &= 20 \text{ bar} \\
 (1 \text{ bar} &= 10^5 \text{ N/m}^2) \\
 K &= 10 \text{ V/(N/mm}^2) \\
 K_{aw} &= K \cdot \hat{w} = 20 \text{ V} \\
 T_1 &= d/k = 0,1 \text{ s}
 \end{aligned}$$



dass die Lösung (Sprungantwort) dieses Differentialgleichungstyps bei einer sprungförmigen Störfunktion wie folgt aussieht:

$$x_{aw}(t) = K_{aw} \cdot \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{T_1}\right) \right] \text{ mit } K_{aw} = K \cdot \hat{w}, K = \frac{A \cdot U}{l \cdot k} \text{ und } T_1 = \frac{d}{k} \quad (\text{Gl. 1.16})$$

In Bild 1.8 ist die Sprungfunktion (Systemfunktion) und die Sprungantwort (Systemantwort) dargestellt. Die Sprungantwort  $x_{aw}(t)$  hat für  $t = 0$  die größte Steigung. Legt man nun an den Ursprungspunkt eine Tangente, so schneidet diese den stationären Endwert  $K_{aw}$  für  $t = T_1$  bei ca. 63 % des stationären Endwertes. Die Zeitkonstante  $T_1$  kennzeichnet die Dynamik des Systems. Der zeitliche Verlauf ist durch die Zeitkonstante  $T_1$  und den Übertragungswert  $K_{aw}$  eindeutig bestimmt.

### Lösung der Differentialgleichung mit Hilfe der Sinusfunktion als Testfunktion

Wir betrachten nun, wie sich die Ausgangsgröße eines linearen Systems verhält, wenn die Eingangsgröße eine Sinusfunktion (s. auch Bild 1.6) ist. Für die Sinusfunktion gilt:

$$x_e(t) \cdot \hat{x}_e \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_e) \text{ für } t \geq 0 \quad (\text{Gl. 1.17})$$

wobei  $\omega$  die Kreisfrequenz und  $\varphi_e$  der Nullphasenwinkel ist.

Durch die Linearität des Systems ändert sich bei sinusförmiger Erregung nur die Amplitude und die Phase der Ausgangsfunktion. Sie bleibt also sinusförmig und schwingt mit derselben Frequenz wie die Eingangsgröße. Setzt man Gl. 1.17 in Gl. 1.11 erhält man eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung 1. Ordnung 1. Grades mit konstanten Koeffizienten mit einer sinusförmigen Störfunktion. Es gilt also:

$$T_1 \cdot \dot{x}_a(t) + x_a(t) = K \cdot \hat{x}_e \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_e) \quad (\text{Gl. 1.18})$$

mit dem Faktor  $K$  wie in Gl. 1.12 definiert.

Die Lösung dieser linearen Differentialgleichung setzt sich aus der Lösung der homogen und einer stationären Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zusammen. Durch Berechnung erhält man:

$$x_a(t) = \hat{x}_a \cdot \left[ \sin(\omega \cdot t + \varphi) - \sin\varphi \cdot \exp\left(-\frac{t}{T_1}\right) \right] \quad (\text{Gl. 1.19})$$

mit der Amplitude:

$$\hat{x}_a = \frac{\hat{x}_e \cdot K}{\sqrt{1 + (\omega \cdot T_1)^2}} \quad (\text{Gl. 1.20})$$

und dem Phasenwinkel:

$$\varphi = \varphi_a - \varphi_e = \arctan(\omega \cdot T_1) \quad (\text{Gl. 1.21})$$

wobei der Phasenwinkel die Phasenverschiebung zwischen Aus- und Eingangssignal ist. Bild 1.9 zeigt die Sinusfunktion (Systemfunktion) und die Sinusantwort (Systemantwort). Nach der Zeit  $t = 5 \cdot T_1$  ist die e-Funktion in Gl. 1.19 nahezu 0 und damit vernachlässigbar, d.h., der Einschwingvorgang ist beendet und die Ausgangsgröße ist dann eine ungedämpfte harmonische Schwingung. Es gilt dann mit Gl. 1.19:

$$x_a(t) = \hat{x}_a \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \quad (\text{Gl. 1.22})$$

Wie Gl. 1.17 und Gl. 1.22 zeigt, hat im stationären Betrieb die Ausgangsgröße  $x_a$  die gleiche Kreisfrequenz wie die Eingangsgröße  $x_e$ . Wie aus Gl. 1.20 und Gl. 1.21 ersichtlich, hängt im nicht stationären Betrieb die Amplitude des Ausgangssignals und die

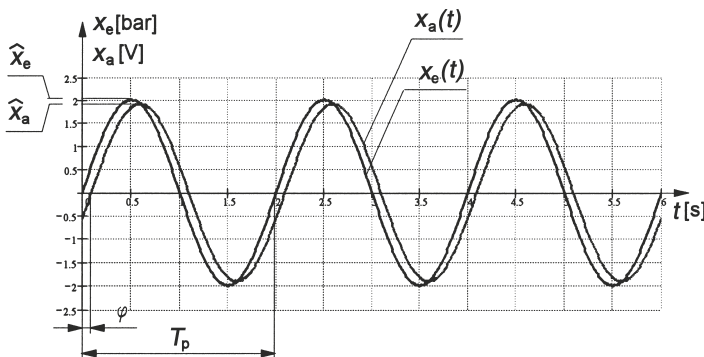


Bild 1.9  
Sinusfunktion und  
Sinusantwort des  
elektropneu-  
matischen Wandlers

$x_{e-} = 2 \text{ bar}$ $(1 \text{ bar} = 10^5 \text{ N/m}^2)$ $x_{a-} = 1,91 \text{ V}$ $T_p = 2 \text{ s}$ $\varphi = -16,7^\circ$
---

Phasenverschiebung zwischen Aus- und Eingangssignal von der Kreisfrequenz ab.  
**Ende des Beispiels**

### 1.3.2 Übertragungsfunktion im Zeitbereich

#### Dynamische Übertragungsfunktion

Als Übertragungsfunktion  $b(t)$  eines Systems wird das Verhältnis der Sprungantwort  $x_{aw}(t)$  zu der Sprungfunktion  $w(t)$  für  $w(t) > 0$  bezeichnet. Es gilt dann:

$$b(t) \equiv \frac{x_{aw}(t)}{w(t)} \quad (\text{Gl. 1.23})$$

Lineare Systeme mit Energiespeichern (Masse, Feder, Kondensator, Spule, Wärmespeicher usw.) können im Zeitbereich entweder mit ihrer linearen Differentialgleichung oder für  $w(t) > 0$  mit ihrer Übertragungsfunktion  $b(t)$  beschrieben werden.

#### Fortsetzung 1 zum Beispiel: Elektropneumatischer Wandler

Verwendet man als Eingangsfunktion die Sprungfunktion  $w(t)$  und als Ausgangsfunktion die Sprungantwort  $x_{aw}(t)$ , erhält man für die Übertragungsfunktion nach Gl. 1.23:

$$b_w(t) = \frac{x_{aw}(t)}{w(t)} = \frac{K_{aw} \cdot \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{T_1}\right) \right]}{\hat{i}w} \Rightarrow b_w(t) = K_{hw} \cdot \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{T_1}\right) \right] \quad (\text{Gl. 1.24})$$

wobei  $K_{hw}$  der Übertragungsfaktor des Systems ist.

**Ende des Beispiels**

#### Statische Übertragungsfunktion oder Empfindlichkeit

Die physikalischen Zustände von Übertragungsgrößen die keine Funktionen der Zeit sind nennt man statisch. Damit werden in der Gl. 1.6 alle Terme die Ableitungen nach der Zeit enthalten 0. Die Lösung der Differentialgleichung lautet dann:

$$a_0 \cdot \Delta x_a = b_0 \cdot \Delta x_e \Rightarrow \frac{\Delta x_a}{\Delta x_e} = \frac{b_0}{a_0} = \text{konst} \Rightarrow E \equiv \frac{\Delta x_a}{\Delta x_e} \quad (\text{Gl. 1.25})$$

wobei  $E$  mathematisch die konstante Steigung der Kennlinie oder physikalisch die sog. Übertragungsempfindlichkeit (kurz Empfindlichkeit) eines Teilsystems ist. Sie ist Grundlage für weitere Begriffe (Nichtlinearität, Hysterese, thermische Driften usw.) zur Beschreibung des statischen Verhaltens technischer Systeme dar.

#### Fortsetzung 2 zum Beispiel: Elektropneumatischer Wandler

Ausgehend von der linearen Differentialgleichung Gl. 1.11 und der Gl. 1.12 erhält man für den statischen Fall:

$$\Delta x_a = K \cdot \Delta x_e \Rightarrow E = \frac{\Delta x_a}{\Delta x_e} = K = \frac{A \cdot U}{l \cdot k} \quad (\text{Gl. 1.26})$$

wobei  $A$  die Membranfläche,  $U$  die Konstanzspannung,  $l$  die Gesamtlänge der Potentiometer-Widerstandsbahn und  $k$  die Federkonstante der Druckfeder ist.

Ende des Beispiels

### 1.3.3 Analogiebildung zwischen mechanischen und elektrischen Systemen

Die dynamischen physikalischen Vorgänge in anderen Ingenieurwissenschaften lassen sich mit Differentialgleichungssystemen beschreiben, die mathematisch eine direkte Entsprechung in der Elektrotechnik haben.

Das mechanische System besteht aus den Grundelementen Masse (Massenwert  $m$ ), Feder (Federkonstante  $k$ ) und Dämpfer (Dämpfungskonstante  $d$ ). Das äquivalente elektrische System besteht aus den elektrischen Grundelementen Spule (Induktivität  $L$ ), Kondensator (Kapazität  $C$ ) und dem Widerstand (Wert  $R$ ). Wir zeigen nun, dass das mechanische Masse-Feder-System mit Dämpfung dem elektrischen System einer LCR-Reihenschaltung (Bild 1.10) entspricht.

**Aufstellung der gewöhnlichen linearen Differentialgleichung des elektrischen Systems**  
Liegt am Eingang der Schaltung von Bild 1.10 die Eingangsspannung  $x_e(t)$ , so bewirkt diese, dass der Strom  $i(t)$  durch die Schaltung fließt. Dieser erzeugt an den elektrischen Bauteilen  $R$ ,  $L$  und  $C$  die Spannungsabfälle  $u_R(t)$ ,  $u_L(t)$  und  $u_C(t) = x_a(t)$ . Die Spannung  $u_C(t)$  am Kondensator ist hier die Ausgangsspannung. Für die Anfangsbedingungen gilt: Zum Zeitpunkt  $t = 0$  sind Strom und alle Spannungsabfälle 0. Aus der Schaltung von Bild 1.10 kann man mit Hilfe des 2. Kirchhoff'schen Gesetzes folgende Gleichung aufstellen:

$$x_e(t) = u_R(t) + u_L(t) + x_a(t) \quad (\text{Gl. 1.27})$$

Aus der Elektrotechnik sind für die passiven elektrischen Grundbausteine folgende Strom-Spannungs-Relationen bekannt:

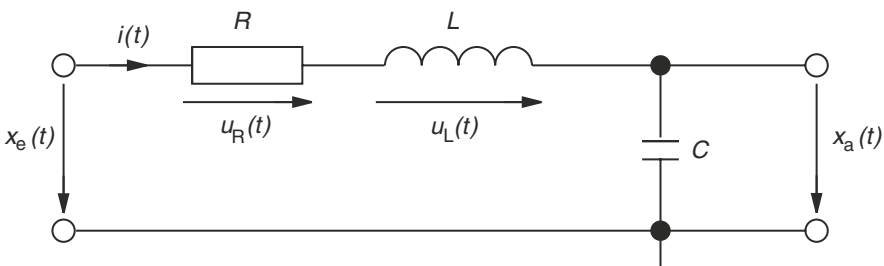


Bild 1.10 Elektrisches Ersatzschaltbild des elektropneumatischen Wandlers



$$u_R(t) = i(t) \cdot R, u_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}, i(t) = C \cdot \frac{dx_a(t)}{dt} \quad (\text{Gl. 1.28})$$

Aus Gl. 1.28 und Gl. 1.27 erhält man:

$$x_e(t) = R \cdot C \cdot \dot{x}_a(t) + L \cdot C \cdot \ddot{x}_a(t) + x_a(t) \quad (\text{Gl. 1.29})$$

oder strukturanalog zu Gl. 1.11:

$$T_2^2 \cdot \ddot{x}_a(t) + T_1 \cdot \dot{x}_a(t) + x_a(t) = 1 \cdot x_e(t) \quad (\text{Gl. 1.30})$$

mit

$$T_2^2 \equiv \frac{1}{\omega_0^2} = L \cdot C, T_1 \equiv \tau = R \cdot C \text{ und } 1 = k_e \quad (\text{Gl. 1.31})$$

wobei  $\omega_0$  die Resonanzfrequenz,  $\tau$  die Zeitkonstante und  $k_e$  der Übertragungsfaktor ist.

Beim Vergleich der Differentialgleichungen der mechanischen und der elektrischen Systeme erkennt man die physikalische Analogie zwischen den Potential- und Flussgrößen. Die mechanische Kraft entspricht damit der elektrischen Spannung (FU-System).

### Koeffizientenberechnung für das FU-System

Ansatz: Die mechanische Kraft soll der elektrischen Spannung entsprechen.

Damit erhalten wir die Umrechnung folgender Gleichung:

$$F(t) = FU \cdot u(t) \quad (\text{Gl. 1.32})$$

wobei  $FU$  die sog. Umrechnungskonstante ist. Sie hat nach Gl. 1.32 folgende SI-Dimension:

$$\dim FU = \frac{\text{N}}{\text{V}} \equiv \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{V} \cdot \text{m}} \equiv \frac{\text{V} \cdot \text{A} \cdot \text{s}}{\text{V} \cdot \text{m}} \equiv \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{m}} \Rightarrow \frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{1}{\dim FU} \cdot \text{A} \Rightarrow v(t) = \frac{1}{FU} \cdot i(t) \quad (\text{Gl. 1.33})$$

für den mechanischen Weg  $s(t)$  erhält man mit Gl. 1.33:

$$s(t) = \frac{1}{FU} \cdot \int_0^t i(t) \cdot dt = \frac{1}{FU} \cdot q(t) = \frac{1}{FU} \cdot C \cdot u_C(t) \Rightarrow s(t) = \frac{C}{FU} \cdot u_C(t) \quad (\text{Gl. 1.34})$$

wobei  $q(t)$  die im Kondensator  $C$  gespeicherte Ladung ist, welche die Spannung  $u_C(t)$  bewirkt.

Die Grundgleichungen für das mechanische System lauten:

$$F_{\text{Tr}}(t) = m \cdot \frac{dv(t)}{dt}, F_d(t) = d \cdot v(t), F_k(t) = k \cdot s(t) \quad (\text{Gl. 1.35})$$

Die Grundgleichungen für das elektrische System lauten:

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}, u_R(t) = R \cdot i(t), u_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(t) \cdot dt \quad (\text{Gl. 1.36})$$

### Umrechnungen

Aus der Differentialgleichung für das mechanische und das elektrische System erkennt man: Die Masse  $m$  entspricht der Induktivität  $L$  (gibt dem System seine Trägheit), die Federkonstante  $k$  entspricht der Kapazität  $C$  (speichert die potentielle Energie), die Dämpfungskonstante  $d$  entspricht dem elektrischen Widerstand  $R$ . Also gilt mit Gl. 1.32:

$$m \cdot \frac{dv(t)}{dt} = FU \cdot L \cdot \frac{di(t)}{dt} \Rightarrow m \cdot v(t) = FU \cdot L \cdot i(t) \Rightarrow L = \frac{m \cdot v(t)}{FU \cdot i(t)} \quad (\text{Gl. 1.37})$$

Aus Gl. 1.33 und Gl. 1.37 erhält man für die Induktivität die Umrechnungsrelation

$$L = \frac{m}{(FU)^2} \quad (\text{Gl. 1.38})$$

weiter gilt dann analog:

$$d \cdot v(t) = FU \cdot R \cdot i(t) \Rightarrow R = \frac{d \cdot v(t)}{FU \cdot i(t)} \quad (\text{Gl. 1.39})$$

Aus Gl. 1.33 und Gl. 1.39 erhält man für den Widerstand die Umrechnungsrelation:

$$R = \frac{d}{(FU)^2} \quad (\text{Gl. 1.40})$$

außerdem gilt analog:

$$k \cdot s(t) = FU \cdot \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(t) \cdot dt \Rightarrow k \cdot \frac{ds(t)}{dt} = FU \cdot \frac{1}{C} \cdot i(t) \Rightarrow C = \frac{FU \cdot i(t)}{k \cdot v(t)} \quad (\text{Gl. 1.41})$$

Aus Gl. 1.33 und Gl. 1.41 erhält man für die Kapazität die Umrechnungsrelation:

$$C = \frac{(FU)^2}{k} \quad (\text{Gl. 1.42})$$

Ergänzend wird die Umrechnung zwischen mechanischer und elektrischer Impedanz gezeigt. Setzt man in die Gleichung für die elektrische Impedanz die Gl. 1.33, erhält man:

$$Z_{\text{el}} = \frac{u(t)}{i(t)} = \frac{1}{(FU)^2} \cdot \frac{F(t)}{v(t)} \Rightarrow Z_{\text{el}} = \frac{1}{(FU)^2} \cdot Z_{\text{mech}} \quad \text{mit} \quad Z_{\text{mech}} = \frac{F(t)}{v(t)} \quad (\text{Gl. 1.43})$$

Für die Festlegung der Umrechnungskonstanten  $FU$  hat man verschiedene Möglichkeiten. Bei rein mechanischen Systemen wird im einfachsten Fall  $FU = 1$  gewählt. Sollen die elektrischen Bauteile in bestimmten Wertebereichen liegen, wird  $FU$  entsprechend angepasst. Liegt eine Kopplung zwischen einem mechanischen und einem elektrischen System vor, ist  $FU$  so zu wählen, dass sie der Kopplung entspricht.

Ergänzend wird hier noch darauf verwiesen, dass anstelle des  $FU$ -Systems auch ein FI-System für den Aufbau einer elektrischen Ersatzschaltung verwendet werden kann. Die Analogie zwischen Mechanik und Elektrotechnik kann in der Mechatronik gut ausgenutzt werden. Mechanische Teilsysteme, die mit elektronischen Teilsystemen ein mechatronisches Gesamtsystem bilden, können mit elektrotechnischen Simulatoren (z.B. SPICE) umfassend simuliert werden, indem man äquivalente elektrische Bauelemente verwendet und die so gewonnene elektrische Ersatzschaltung mit den nachfolgenden elektronischen Schaltungen zu einer Gesamtschaltung (Gesamtmodell) zusammenfügt und komplett simuliert.

## 1.4 Aufstellung und Lösung linearer Differentialgleichungen im Frequenzbereich

### 1.4.1 Euler-Transformation

Als Testsignale werden sehr oft sinusförmige Signale eingesetzt, da sie technisch sehr einfach zu erzeugen sind. Sie haben bei schnellen Systemen große technische Vorteile gegenüber anderen Testsignalen. Die direkte Lösung von linearen Differentialgleichungen im Zeitbereich erfordert – auch bei Verwendung einer sinusförmigen Testfunktion – immer noch einen großen Rechenaufwand. Man kann hier vorteilhaft die sog. Funktionaltransformation nach Euler einsetzen. Sie ist aber nur auf lineare zeitinvariante Differentialgleichungen anwendbar!

#### Transformationsschema

- Hintransformation vom reellen Originalraum in den komplexen Bildraum,
- Berechnung im komplexen Bildraum,
- Rücktransformation in den reellen Originalraum.

## 1.4.2 Aufstellen und Lösen linearer Differentialgleichungen für harmonische Vorgänge

Wir wollen nun die Euler-Transformation auf eine lineare Differentialgleichung mit einer kosinusförmigen Testfunktion (in der Mathematik Störfunktion genannt) anwenden. Für die Testfunktion gilt:

$$x_e(t) = \hat{x}_e \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_e) \text{ für } t \geq 0 \quad (\text{Gl. 1.44})$$

### Hintransformation

Die Hintransformation erfolgt nach Euler durch Ergänzung mit einem imaginären Term (siehe hierzu Mathematik der komplexen Zahlen und Funktionen). Für die Testfunktion (Eingangssignal des technischen Systems) gilt dann:

$$\begin{aligned} x_e(t) &= \hat{x}_e \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_e) \xrightarrow{\text{Transformation}} \\ \underline{x}_e(t) &= \hat{x}_e \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_e) + j \cdot \hat{x}_e \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_e) \end{aligned} \quad (\text{Gl. 1.45})$$

Für die Ausgangsgröße gilt nach dem oben Gesagten:

$$\begin{aligned} x_a(t) &= \hat{x}_a \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_a) \xrightarrow{\text{Transformation}} \\ \underline{x}_a(t) &= \hat{x}_a \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_a) + j \cdot \hat{x}_a \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_a) \end{aligned} \quad (\text{Gl. 1.46})$$

wobei  $j$  der imaginäre Einheitsvektor ist. Die komplexen Größen werden immer durch Unterstrichungen gekennzeichnet. Für die Transformation der linearen Differentialgleichung gilt dann:

$$\begin{aligned} \dots + a_2^2 \cdot \underline{\ddot{x}}_a(t) + a_1 \cdot \underline{\dot{x}}_a(t) + a_0 \cdot \underline{x}_a(t) &= \\ \dots + b_2^2 \cdot \underline{\ddot{x}}_e(t) + b_1 \cdot \underline{\dot{x}}_e(t) + b_0 \cdot \underline{x}_e(t) & \end{aligned} \quad (\text{Gl. 1.47})$$

### Berechnung im komplexen Zahlenraum (Bildbereich)

Umformung und Lösung der linearen komplexen Differentialgleichung im Bildbereich. Nach EULER gilt:

$$\cos(\omega \cdot t + \varphi) \pm j \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) = \exp[\pm j \cdot (\omega \cdot t + \varphi)] \quad (\text{Gl. 1.48})$$

Aus Gl. 1.48 in Gl. 1.45 und Gl. 1.46 erhält man:

$$\underline{x}_e(t) = \hat{x}_e \cdot \exp[j \cdot (\omega \cdot t + \varphi_e)] \text{ und } \underline{x}_a(t) = \hat{x}_a \cdot \exp[j \cdot (\omega \cdot t + \varphi_a)] \quad (\text{Gl. 1.49})$$

nun bildet man die zeitlichen Ableitungen der komplexen Funktionen Gl. 1.49, es gilt:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\underline{x}}_e(t) &= j \cdot \omega \cdot \hat{x}_e \cdot \exp[j \cdot (\omega \cdot t + \varphi_e)] = j \cdot \omega \cdot \underline{x}_e(t) \\ \ddot{\underline{x}}_e(t) &= (j \cdot \omega)^2 \cdot \hat{x}_e \cdot \exp[j \cdot (\omega \cdot t + \varphi_e)] = (j \cdot \omega)^2 \cdot \underline{x}_e(t) \\ &\text{usw.} \end{aligned} \right\} \quad (\text{Gl. 1.50})$$

und

$$\left. \begin{aligned} \dot{\underline{x}}_a(t) &= j \cdot \omega \cdot \hat{x}_a \cdot \exp[j \cdot (\omega \cdot t + \varphi_a)] = j \cdot \omega \cdot \underline{x}_a(t) \\ \ddot{\underline{x}}_a(t) &= (j \cdot \omega)^2 \cdot \hat{x}_a \cdot \exp[j \cdot (\omega \cdot t + \varphi_a)] = (j \cdot \omega)^2 \cdot \underline{x}_a(t) \\ &\text{usw.} \end{aligned} \right\} \quad (\text{Gl. 1.51})$$

Gl. 1.49, Gl. 1.50, Gl. 1.51 eingesetzt in Gl. 1.47 ergibt eine lineare algebraische komplexe Gleichung:

$$\begin{aligned} \dots + a_2^2 \cdot (j \cdot \omega)^2 \cdot \underline{x}_a(t) + a_1 \cdot (j \cdot \omega) \cdot \underline{x}_a(t) + a_0 \cdot \underline{x}_a(t) = \\ \dots + b_2 \cdot (j \cdot \omega)^2 \cdot \underline{x}_e(t) + b_1 \cdot (j \cdot \omega) \cdot \underline{x}_e(t) + b_0 \cdot \underline{x}_e(t) \end{aligned} \quad (\text{Gl. 1.52})$$

Die algebraische Lösung der Gl. 1.52 ergibt die komplexe Ausgangsfunktion  $\underline{x}_a(t)$ :

$$\underline{x}_a(t) = \frac{\dots + b_2 \cdot (j \cdot \omega)^2 + b_1 \cdot (j \cdot \omega) + b_0}{\dots + a_2 \cdot (j \cdot \omega)^2 + a_1 \cdot (j \cdot \omega) + a_0} = \underline{x}_e(t) \quad (\text{Gl. 1.53})$$

### 1.4.3 Komplexer Frequenzgang

#### Komplexe Drehzeiger

Es werden nun komplexe Drehzeiger für die Eingangsgröße  $x_e(t)$  und die Ausgangsgröße  $x_a(t)$  eingeführt und in den Bildern 1.11a, b grafisch dargestellt.

$$\underline{F}(j \cdot \omega) = \frac{\underline{x}_a(t)}{\underline{x}_e(t)} = \frac{\dots + b_2 \cdot (j \cdot \omega)^2 + b_1 \cdot (j \cdot \omega) + b_0}{\dots + a_2 \cdot (j \cdot \omega)^2 + a_1 \cdot (j \cdot \omega) + a_0} \quad (\text{Gl. 1.54})$$

#### Berechnung des Frequenzganges aus der komplexen Zeigerdarstellung

Im eingeschwungenen Zustand ist der komplexe Frequenzgang  $\underline{F}(j \cdot \omega)$  definiert als Quotient der komplexen Ausgangsgröße zur komplexen Eingangsgröße. Er ist in Bild 1.11c grafisch dargestellt. Es gilt damit für die direkte Berechnung des Frequenzganges aus der komplexen Zeigerdarstellung:

$$\underline{F}(j \cdot \omega) = \frac{\underline{x}_a(t)}{\underline{x}_e(t)} \quad (\text{Gl. 1.55})$$

setzt man Gl. 1.49 in Gl. 1.55 erhält man für den Frequenzgang:

$$\underline{F}(j \cdot \omega) = \frac{\hat{x}_a}{\hat{x}_e} \cdot \exp(j \cdot \varphi) \quad \text{mit } \varphi = \varphi_a - \varphi_e \quad (\text{Gl. 1.56})$$

wobei  $\varphi$  die Phasenverschiebung zwischen der Eingangs- und der Ausgangsgröße darstellt.

#### 1.4.4 Ortskurve

Der Frequenzgang ist eine komplexe Funktion, deren Verlauf man in der komplexen Ebene darstellt. Diese grafische Darstellung heißt Ortskurve (Bild 1.12). Die unabhängige Variable dieser Funktion ist die Kreisfrequenz  $\omega$ , ihr Wertebereich reicht von  $0^\circ \dots \infty$ . Will man die Ortskurve aus dem Frequenzgang (Gl. 1.54) ermitteln, wird der komplexe Ausdruck in Realteil (Re) und Imaginärteil (Im) zerlegt und für die jeweilige Kreisfrequenz  $\omega$  in die komplexe Ebene übertragen. In Bild 1.11c wurde dies bereits veranschaulicht.

$$\underline{F}(j \cdot \omega) = \text{Re}\{\underline{F}(j \cdot \omega)\} + j \cdot \text{Im}\{\underline{F}(j \cdot \omega)\} \quad (\text{Gl. 1.57})$$

Mit Gl. 1.57 ist die Ortskurve konstruierbar, indem man verschiedene  $\omega$ -Werte einsetzt und die damit errechneten Punkte in die komplexe Ebene einzeichnet. Die Verbindungslinie der Punkte ist dann die Ortskurve (s. Bild 1.12). Der Fahrstrahl, vom Ko-

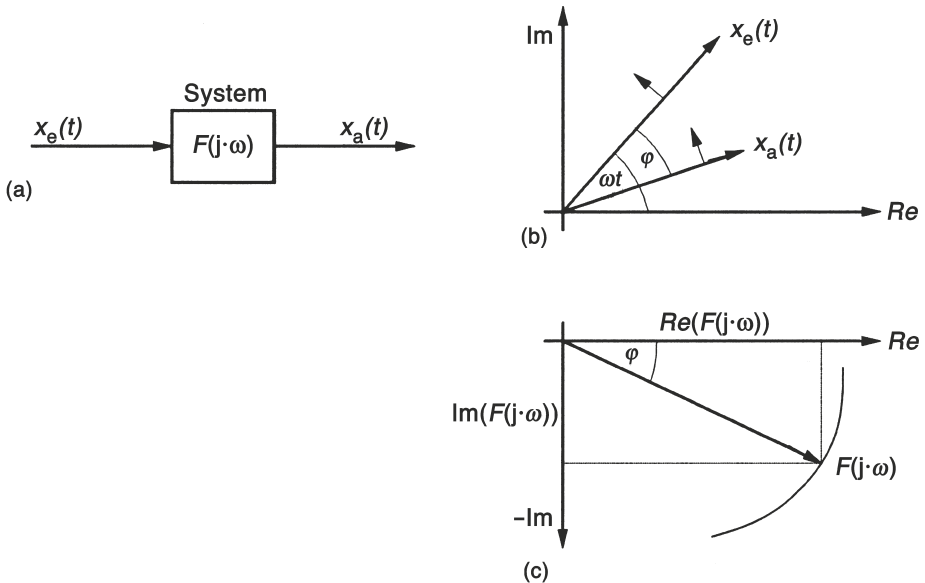


Bild 1.11 a) Blockbilddarstellung des Frequenzganges: b) komplexer Ein- und Ausgangsvektor, c) ein Wert des komplexen Frequenzganges