Vorwort

Die Wärmeübertragung ist durch die Verschiedenheit der Anwendungsmöglichkeiten und Übertragungsformen ein so komplexes Gebiet, dass es entweder sehr spezifisch theoretische oder aber nur praxisorientierte Abhandlungen hierzu gibt. Hinzu kommt, dass oftmals mehrere Übertragungsformen an einer Stelle auftreten können. In diesem Buch werden einheitliche Grundlagen für die verschiedenen Formen verwendet. Mit ihnen lässt sich die Wärmeübertragung (mit Ausnahme der Wärmestrahlung) auf die Wärmeleitung in der thermischen Grenzschicht zurückführen. Somit kann mit den Gleichungen der Wärmeleitung und der Grenzschichtdicke der Wärmeübergang einheitlich dargestellt werden.

Mit den angegebenen Ableitungen und Gleichungen wird es auch leicht fallen, Probleme, die noch nicht ganz allgemein zufrieden stellend gelöst sind, wie z. B. die Verdampfung im horizontalen Rohr, auf den angegebenen Kenngrößen aufzubauen, wobei die Konstanten durch Versuche ermittelt werden.

Dieses Buch ist für Studierende an Universitäten und Fachhochschulen der Fachrichtung Maschinenbau, Verfahrenstechnik, Elektrotechnik und Bauwesen sowie für Techniker in höheren Semestern und den in der Praxis tätigen Fachleuten im Anlagen-, Apparate- und Wärmeaustauscherbau gedacht.

Neben den Grundkenntnissen der Mathematik, Strömungs- und Wärmelehre sind keine besonderen Grundlagen für das Verständnis des Buches erforderlich.

Die aufgeführten Gleichungen erlauben es dem Anwender, die in Studium und Beruf auftretenden Probleme der Wärmeübertragung zu lösen.

Da es oftmals etwas schwer fällt, die richtigen Gleichungen für einen speziellen Anwendungsfall zu finden, wurden am Schluss des Buches die wichtigsten Gleichungen nochmals tabellarisch zusammengefasst und bei der Wärmeleitung ein Berechnungsschema für die Wärmedämmberechnungen angegeben. Aufgaben am Ende der Kapitel simulieren praktische Problemstellungen und vermitteln Lösungswege.

Insbesondere durch den in der Praxis immer wieder zu bestimmenden Temperaturverlauf an Stäben und Stützen sowie nach der Suche einer einfachen Potenzgleichung für den Wärmeübergang in Rohren wurde diesen beiden Punkten besondere Aufmerksamkeit gewidmet.

Mit den zu erarbeitenden Kenntnissen aus diesem Buch wird es dem Anwender erleichtert, die umfangreicheren Gleichungen im Standardwerk der Wärmeübertragung, dem VDI-Wärmeatlas, zu verstehen und anzuwenden.

Dem Vogel Buchverlag danke ich für die gewohnt hervorragende Zusammenarbeit.

Resonanz zum Buch und den vermittelten Themen ist mir stets willkommen, weil ein lebendiger Wissensaustausch Forschungs- und Lehrbetrieb immer wieder motivieren und inspirieren kann.

Den schnellsten Kontakt erfüllt eine E-Mail an: wagner@wts-online.de

St. Leon-Rot — Walter Wagner

Inhaltsverzeichnis

Formelzeichen und Einheiten

Die nachfolgenden Zeichen werden grundsätzlich angewendet, wobei Abweichungen und Ergänzungen von diesen Formelzeichen jeweils bei den entsprechenden Gleichungen oder Bildern genannt sind. Nach Möglichkeit wurde die in den DIN-Normen bzw. im VDI-Wärmeatlas bereits eingeführten Zeichen verwendet.

Formelzeichen	Bedeutung	Einheiten	Bemerkung
A	Fläche, Querschnittsfläche, Austauschfläche	m^2	
C	Strahlungskonstante	$W/(m^2 \cdot K^4)$	
C_s	Strahlungskonstante des schwarzen Körpers	$W/(m^2 \cdot K^4)$	$C_s = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$
C	Integrationskonstante	–	
D	Durchmesser	m	
D	Diffusionskoeffizient	m^2/s	
E	Energie	J	
F	Kraft	N	
G	Gewichtskraft	N	$G = M \cdot g$
K	Konstante	–	
L	Länge	m	
M	Masse	kg	
$\dot{M}$	Massenstrom	kg/s	
Q	Wärmemenge	J	$1\,J = 1\,Ws$
$\dot{Q}$	Wärmestrom	W	$1\,W = J/s$
R	Radius	m	
R_ϑ	Wärmewiderstand	$m^2 \cdot K/W$	
T	Temperatur, thermodynamisch	K	
U	Umfang	m	
V	Volumen	m^3	
$\dot{V}$	Volumenstrom	m^3/s	
$\dot{W}$	Wärmekapazitätsstrom	W/K	$\dot{W} = \dot{M} \cdot c$
X	Martinelli-Parameter	–	
a	Temperaturleitfähigkeit	m^2/s	$a = \dfrac{\lambda}{c \cdot \varrho}$
a	Absorptions- oder Emissionskoeffizient	–	
b	Breite	m	
b	Wärmeeindringkoeffizient	$Ws^{1/2}/(m^2 \cdot K)$	$b = \sqrt{\lambda \cdot \varrho \cdot c}$
c	Wärmekapazität, spezifisch	$J/(kg \cdot K)$	
c_p	Wärmekapazität bei konstantem Druck	$J/(kg \cdot K)$	
c_v	Wärmekapazität bei konstantem Volumen	$J/(kg \cdot K)$	
c_f	Widerstandskoeffizient	–	
c_i	Stoffmengenkonzentration	–	
d	Durchmesser	m	
d_h	Hydraulischer Durchmesser	m	
d_A	Blasenabreißdurchmesser	m	
f	Faktor, Funktion	–	
f	Frequenz	Hz	$1\,Hz = 1/s$
g	Fallbeschleunigung	m/s^2	$g = 9{,}81$
h	Höhe	m	
Δh_v	spezifische Verdampfungsenthalpie	J/kg	
k	Wärmedurchgangskoeffizient	$W/(m^2 \cdot K)$	

Formel-zeichen	Bedeutung	Einheiten	Bemerkung
l	Länge	m	
$\dot{m}$	Massenstromdichte	$kg/(m^2 \cdot s)$	
n	Rohranzahl	–	
p	Druck	Pa	$1\ Pa = 1\ N/m^2$
$\dot{q}$	Wärmestromdichte	W/m^2	
r	Radius	m	
s	Schichtdicke, Wanddicke, Abstand	m	
t	Zeit	s	
t	Teilung	m	
v	Volumen, spezifisch	m^3/kg	$v = \frac{1}{\varrho}$
w	Geschwindigkeit	m/s	
w_ψ	wirksame Geschwindigkeit	m/s	
w_∞	Anströmgeschwindigkeit	m/s	
$\dot{x}$	Dampfziffer	–	
x	laufende Koordinate	m	
y	laufende Koordinate	m	
z	laufende Koordinate	m	
α	Wärmeübergangskoeffizient	$W/(m^2 \cdot K)$	
α	Absorptionsverhältnis	–	
β	räumlicher Wärmeausdehnungskoeffizient	1/K	
β	Winkel	grd, Bogenmaß	
β	Stoffübergangskoeffizient	–	$\beta = \frac{D}{\delta_D}$
δ	Grenzschichtdicke	m	
δ	Richtabstand	m	
ε	Emissionsverhältnis	–	
ε	Porosität	–	
η	dynamische Viskosität	$Pa \cdot s$	$\eta = \nu \cdot \varrho \quad \frac{kg}{s \cdot m}$
η	Wirkungsgrad	–	
ϑ	Temperatur, Celsius	°C	
λ	Wärmeleitfähigkeit	$W/(m \cdot K)$	
λ	Wellenlänge	µm	
ν	Kinematische Viskosität	m^2/s	$\nu = \eta/\varrho$
ξ	Widerstandskoeffizient	–	
ϱ	Dichte	kg/m^3	
σ	Spannung	N/m^2	
σ	Oberflächenspannung	N/m	
τ	Schubspannung	N/m^2	
φ	Einstrahlzahl	–	
φ	Schutzschicht- und Verschmutzungsfaktor	–	
ψ	Hohlraumanteil	–	
Θ	dimensionslose Temperaturdifferenz	–	
Φ	Winkel	grd, Bogenmaß	

Vorzeichen

Δ	Differenz
d	differentiell
∂	partiell
Σ	Summe
$\int$	Integral

Formelzeichen	Bedeutung	Einheiten	Bemerkung
Exponenten			
$\cdot$	auf die Zeit bezogene Größe		
$\wedge$	maximal		
$\vee$	minimal		
$'$	Eintrittstemperatur, Wirkgröße, Flüssigkeit		
$''$	Austrittstemperatur, Dampf		
$-$	Mittelwert		
$\sim$	Molare Größe		
Indizes			
A	Austritt		
B	Blasenverdampfung		
D	Dampf		
D	Diffusion		
E	Eintritt		
Fl	flüssig		
Gr	Grenzschicht		
Konv	Konvektion		
L	Länge, Plattenlänge		
R	Rippe		
St	Staub		
Str	Strahlung		
W	Wand, Werkstück		
WT	Wärmetauscher		
a	außen, Anlauf		
d	Durchmesser		
fl	fluchtend		
g	gasförmige Phase		
geg	Gegenstrom		
ges	Gesamt		
gl	Gleichstrom, gleichwertig		
gr	große Temperaturdifferenz		
i	innen, Reihenfolge		
kin	kinematisch		
kl	kleine Temperaturdifferenz		
kreuz	Kreuzstrom		
krit	kritisch		
l	flüssige Phase		
lam	laminare Strömung		
log	logarithmisch		
m	Mittelwert		
n	Normzustand, Normalrichtung, Reihenfolge		
o	Bezug auf Oberfläche		
red	reduziert		
s	feste Phase, Siedezustand, Spalt		
senkr	senkrecht		
turb	turbulente Strömung		
u	Umgebung		
vers	versetzt		
waager	waagerecht		
zph	2-Phasen-Strömung		

Formel-zeichen	Bedeutung	Einheiten	Bemerkung
β	Winkel		
ϑ	thermisch		
τ	Widerstand, Reibung		
0	Anfangswert		
1	Anfang, Eingang		
2	Ende, Ausgang		
∞	unendlich, Umgebung		

Kenngrößen

Kurzzeichen	Benennung	Formel
Ar	ARCHIMEDES-Zahl	$Ar = \frac{g \cdot L}{w_\infty^2} \cdot \beta \cdot \Delta\vartheta = Ga \cdot \frac{\Delta\varrho}{\varrho}$
Bi	BIOT-Zahl	$Bi = \frac{\alpha \cdot s}{\lambda}$
Fo	FOURIER-Zahl	$Fo = \frac{a \cdot t}{s^2}$
Fr	FROUDE-Zahl	$Fr = \frac{w^2}{g \cdot L}$
Ga	GALILEI-Zahl	$Ga = \frac{g \cdot L^3}{\nu^2} = \frac{Re^2}{Fr}$
Gr	GRASHOF-Zahl	$Gr = \frac{g \cdot L^3 \cdot \beta \cdot \Delta\vartheta}{\nu^2} = Ga \cdot \beta \cdot \Delta\vartheta$
Gz	GRAETZ-Zahl	$Gz = Re \cdot Pr \cdot \frac{d}{L} = Pe \cdot \frac{d}{L} = \frac{w \cdot d}{a}$
Le	LEWIS-Zahl	$Le = \frac{a}{D}$
Ra	RAYLEIGH-Zahl	$Ra = Gr \cdot Pr = \frac{g \cdot L^3}{a \cdot \nu} \cdot \beta \cdot \Delta\vartheta$
Nu	NUßELT-Zahl	$Nu = \alpha \cdot \frac{L}{\lambda}$
Pe	PÉCLET-Zahl	$Pe = Re \cdot Pr = \frac{w \cdot L}{a}$
Ph	Phasenumwandlungszahl	$Ph = \frac{c_1 \cdot (\vartheta_s - \vartheta_W)}{\Delta h_v}$
Pr	PRANDTL-Zahl	$Pr = \frac{\nu}{a} = \frac{\eta \cdot c_p}{\lambda} = \frac{\nu \cdot \varrho \cdot c}{\lambda}$
NTU	Number of Transfer Units	$NTU = \frac{k \cdot A}{\dot{W}}$

Kenngrößen Kurzzeichen	Benennung	Formel
Re	REYNOLDS-Zahl	$Re = \frac{w \cdot L}{\nu} = \frac{w \cdot L \cdot \varrho}{\eta} = \frac{\dot{m} \cdot L}{\eta}$
Sc	SCHMIDT-Zahl	$Sc = \frac{\nu}{D}$
St	STANTON-Zahl	$St = Nu/(Re \cdot Pr) = \frac{\alpha}{\varrho \cdot w \cdot c_{\mathrm{p}}}$
Sh	SHERWOOD-Zahl	$Sh = \frac{L}{\delta_{\mathrm{D}}}$

Zur eindeutigen Bezeichnung einer Kenngröße gehören Angaben darüber, wie die kennzeichnenden Größen definiert und auf welche Temperatur die Stoffwerte bezogen sind.

1 Einleitung

Unter *Wärmeübertragung* ist der Energietransport zu verstehen, der zwischen Festkörpern, Flüssigkeiten oder Gasen unterschiedlicher Temperatur von der hohen zur niedrigen Temperatur erfolgt. Er ist somit auf einen Ausgleich der Temperaturen gerichtet.

Dabei kann Wärme auf 3 Arten übertragen werden: durch Leitung, Konvektion und Strahlung.

1. *Wärmeleitung* ist der molekulare, von Stoffteilchen zu Stoffteilchen erfolgende Transport von Wärme unter der Wirkung eines Temperaturgefälles. Die mittlere Lage der einzelnen Teilchen zueinander kann dabei unverändert bleiben, wie bei Festkörpern, oder veränderlich sein, wie bei Flüssigkeiten und Gasen.
2. Die *Konvektion* ist ein Wärmetransportmechanismus in Flüssigkeiten und Gasen, wobei durch makroskopische Strömungsvorgänge Wärme in Form von innerer Energie von einem Ort zum anderen befördert wird. Man spricht von *freier Konvektion*, wenn die Bewegung aufgrund von Dichteunterschieden (Auftrieb) als Folge von Temperaturunterschieden hervorgerufen wird und von *erzwungener Konvektion*, wenn die Strömung durch äußere Einwirkung (z. B. Ventilatoren, Pumpen) verursacht wird.
3. Ein dritter Wärmetransport resultiert aus der *Wärmestrahlung*. Festkörper, Flüssigkeiten und Gase können thermische Energie in Form elektromagnetischer Wellen ähnlich der Lichtstrahlung aussenden und durch Absorption mehr oder weniger aufnehmen und in innere Energie umwandeln. Ist das Medium zwischen den im Strahlungsaustausch stehenden Körpern strahlungsdurchlässig, wie z. B. Luft, so hat dessen Temperatur keinen Einfluss auf den auch hier vom wärmeren zum kälteren Körper als Wärme fließenden Energiestrom. Der Wellenlängenbereich für die Wärme- oder Temperaturstrahlung liegen im Ultrarotbereich zwischen 0,1 µm und 1000 µm.

Die Wärmeübertragung in festen Körpern geht im Wesentlichen durch Leitung vor sich, teilweise aber auch durch Strahlung bei ausreichend durchlässigen Stoffen. In flüssigen und gasförmigen Stoffen sind alle 3 Übertragungsarten beteiligt, die jedoch verschiedenen Gesetzmäßigkeiten unterliegen.

Die Wärmeübertragung von einem flüssigen oder gasförmigen Medium zu einem festen Körper, z. B. zwischen Luft und einer Wandoberfläche, wird als *Wärmeübergang* bezeichnet. Sie erfolgt überwiegend durch Konvektion und Strahlung.

Wird Wärme zwischen Gasen oder Flüssigkeiten (Fluiden) durch einen Körper hindurch übertragen, z. B. durch eine Wand, so wird dies als *Wärmedurchgang* bezeichnet. Der Wärmedurchgang setzt sich zusammen aus den Wärmeübergängen an den beiden Wandoberflächen und der Wärmeleitung in der Wand.

Bei Wärmeübertragungsvorgängen ist zwischen

> **!** zeitlich unveränderlichen oder stationären und zeitlich veränderlichen oder instationären

Vorgängen zu unterscheiden. Im ersten Fall bleiben die Temperaturen an jeder Stelle des betrachteten Mediums und damit auch die Wärmeströme zeitlich konstant. Dies wird als *stationärer Zustand* bezeichnet.

Zeitlich veränderliche Wärmetransportvorgänge erfordern einen größeren Rechenaufwand, so dass i. Allg. auf das Literaturverzeichnis verwiesen werden muss. Einige wichtige Fälle werden in Abschnitt 2.3 behandelt.

Grundgleichungen für die stationäre Wärmeübertragung

Wärmeaufnahme

Wärmemenge: $Q = M \cdot c \cdot \Delta\vartheta$ in (J) (Gl. 1.1)

Wärmestrom: $\dot{Q} = \frac{Q}{t}$ in $\left(\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = \mathrm{W}\right)$ (Gl. 1.2)

Wärmestromdichte: $\dot{q}_1 = \frac{\dot{Q}}{A_1}$ in $\left(\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\right)$ (Gl. 1.3)

Wärmetransport

Wärmeleitung (Bild 1.1)

$$\dot{Q}_\lambda = \frac{\lambda_W}{s_W} \cdot A \cdot (\vartheta_1 - \vartheta_2) \qquad \text{(Gl. 1.4)}$$

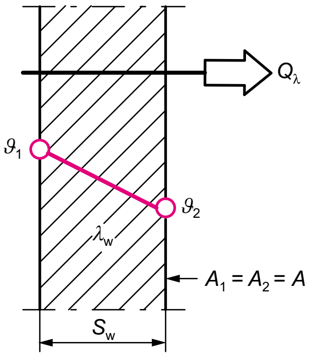


Bild 1.1 Wärmeleitung

Wärmeübergang (Bild 1.2)

$$\dot{Q}_\alpha = \alpha \cdot A \cdot (\vartheta_F - \vartheta_W) \qquad \text{(Gl. 1.5)}$$

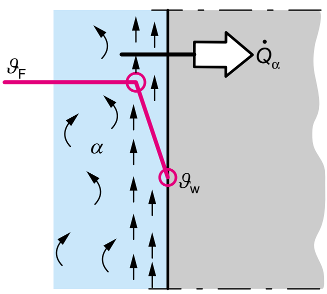


Bild 1.2 Wärmeübergang

Wärmestrahlung (Bild 1.3)

$$\dot{Q}_{str,1,2} = C_{1,2} \cdot A_1 \cdot (T_1^4 - T_2^4) \qquad \text{(Gl. 1.6)}$$

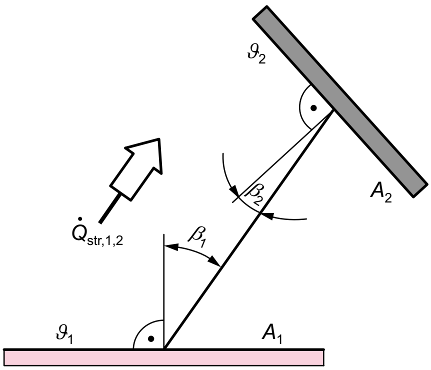


Bild 1.3 Wärmestrahlung

$T = \vartheta + 273{,}15$ (K)

2 Wärmeleitung

2.1 Stationäre Wärmeleitung

Wärmeleitung ist der molekulare Wärmetransport in festen, flüssigen oder gasförmigen Medien unter dem Einfluss einer Temperaturdifferenz. Wird der Wärmetransport dauernd aufrechterhalten durch Zufuhr von Wärme, ist dies der technisch häufige Fall der stationären Wärmeleitung, z. B. in Wärmetauschern.

Die Wärmemenge durch Wärmeleitung wird durch die Gleichung:

$$Q = -\lambda \cdot A \cdot t \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \qquad \text{(Gl. 2.0)}$$

beschrieben, in der λ die Wärmeleitfähigkeit des von der Wärme durchströmten Stoffes, ϑ die Temperatur, A die isothermische Fläche und $\partial\vartheta/\partial x$ der lokale Temperaturgradient ist.

Durch den Querschnitt A eines festen Körpers (Bild 2.1), wobei die Querschnittsfläche wesentlich größer ist als die Umfangsfläche, strömt stationär in der Zeit t nach dem FOURIERschen Gesetz die **Wärmemenge Q:**

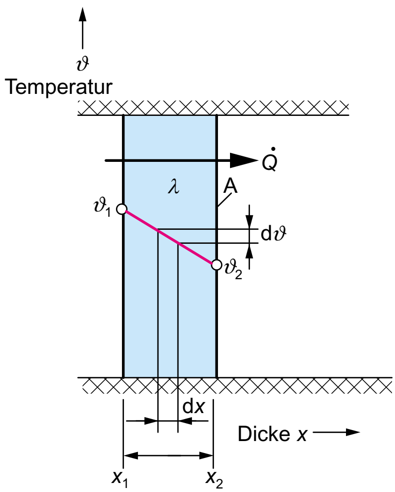


Bild 2.1 Wärmeleitung durch eine ebene Wand

$$Q = -\lambda \cdot A \cdot t \cdot \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}x} \qquad \text{(Gl. 2.1)}$$

Hierin ist $\mathrm{d}\vartheta/\mathrm{d}x$ das Temperaturgefälle in Richtung des Wärmestromes und λ die Wärmeleitfähigkeit. Diese ist abhängig von der Art des Mediums und von der Temperatur.

Der **Wärmestrom** $\dot{Q}$ ist gleich dem Quotienten aus Wärmemenge pro Zeit:

$$\dot{Q} = \frac{Q}{t} = -\lambda \cdot A \cdot \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}x} \qquad \text{(Gl. 2.2)}$$

Bei der Berechnung wird vorausgesetzt, dass eine Temperaturdifferenz nur in einer Richtung vorhanden ist, in den hierzu senkrechten Ebenen die Temperatur aber konstant ist.

Den flächenbezogenen Wärmestrom bezeichnet man als **Wärmestromdichte** $\dot{q}$:

$$\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{A} \qquad \text{(Gl. 2.3)}$$

und mit Gl. 2.2 erhält man:

$$\dot{q} = -\lambda \cdot \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}x} \qquad \text{(Gl. 2.4)}$$

Wenn man einen Stoff mit temperaturabhängiger Wärmeleitfähigkeit $\lambda = f(\vartheta)$ zugrunde legt, erhält man durch Trennung der Variablen

$$\dot{q} \int_{x=0}^{x=s} \mathrm{d}x = -\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \lambda(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta$$

und Integration:

$$\dot{q} = -\frac{1}{s} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \lambda(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta$$

Führt man eine mittlere Wärmeleitfähigkeit $\overline{\lambda}_{1,2}$ im Bereich zwischen den beiden Temperaturen ϑ_1 und ϑ_2 ein, erhält man mit:

$$\overline{\lambda}_{1,2} = \frac{1}{\vartheta_1 - \vartheta_2} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \lambda(\vartheta)\, \mathrm{d}\vartheta \qquad \text{(Gl. 2.5)}$$

die Wärmestromdichte zu:

$$\dot{q} = \frac{\overline{\lambda}_{1,2}}{s} \cdot (\vartheta_1 - \vartheta_2) \qquad \text{(Gl. 2.6)}$$

Siehe Aufgabe 2.1

2.1.1 Wärmeleitfähigkeit

Die Wärmeleitfähigkeit ist ein molekularer Vorgang, der in einem Austausch kinetischer Energie von einem zum anderen Molekül besteht.

Metalle
Bei Metallen erfolgt die Wärmeleitung neben den Molekülschwingungen durch Elektronenströme, die das Leitvermögen erhöhen. In solchen Stoffen sind die Elektronen nicht an einem festen Platz gebunden, sondern wandern im Gitterverband umher (etwa wie die Moleküle in einem Gas). Dies ist der Grund dafür, dass elektrische Leiter wesentlich größere Wärmeleitfähigkeiten besitzen als elektrische Nichtleiter. Die Wärmeleitfähigkeit beträgt bei 20 °C näherungsweise:

$$\lambda_{20\,°\mathrm{C}} \approx \frac{2{,}45 \cdot \varkappa_{\mathrm{e}} \cdot T}{10^8} \quad \mathrm{W/(m \cdot K)} \qquad \text{(Gl. 2.7)}$$

mit:
$\varkappa_{\mathrm{e}}$ elektrische Leitfähigkeit $(1/(\Omega \cdot \mathrm{m}))$
T absolute Temperatur (K)

Größenordnung: $\lambda = 10 \ldots 500$

Gase und Dämpfe
In Gasen bewegen sich die Moleküle mit großer Geschwindigkeit frei im Raum und übertragen Wärme als Schwingungs-, Rotations- und Tanslationsenergie. Die Wärmeleitfähigkeit hängt daher mit der spezifischen Wärmekapazität c_{p} und der Viskosität η zusammen.
Größenordnung:
$\lambda = 0{,}01 \ldots 0{,}025$
mit Ausnahme von H_2 und He.
Die Wärmeleitfähigkeit beträgt bei Drücken von etwa 0,1 bis 10 bar sowie bei 20 °C näherungsweise:

$$\lambda_{20\,°\mathrm{C}} \approx \eta \cdot c_{\mathrm{p}} \cdot \frac{9 - \frac{5}{\varkappa}}{4} \quad \mathrm{W/(m \cdot K)} \qquad \text{(Gl. 2.8)}$$

mit:
$\varkappa$ Isentropenexponent
c_{p} spezifische Wärmekapazität bei konst. Druck
η dynamische Viskosität (Pa · s)

Flüssigkeiten
Größenordnung:
Organische Flüssigkeiten $\lambda = 0{,}1 \ldots 0{,}2$ W/(m · K)
Wasser, NH_3 und andere polare Flüssigkeiten $\lambda = 0{,}2 \ldots 0{,}6$ W/(m · K)
Salzschmelzen $\lambda = 1 \ldots 4$ W/(m · K)
Metallschmelzen $\lambda = 10 \ldots 100$ W/(m · K)

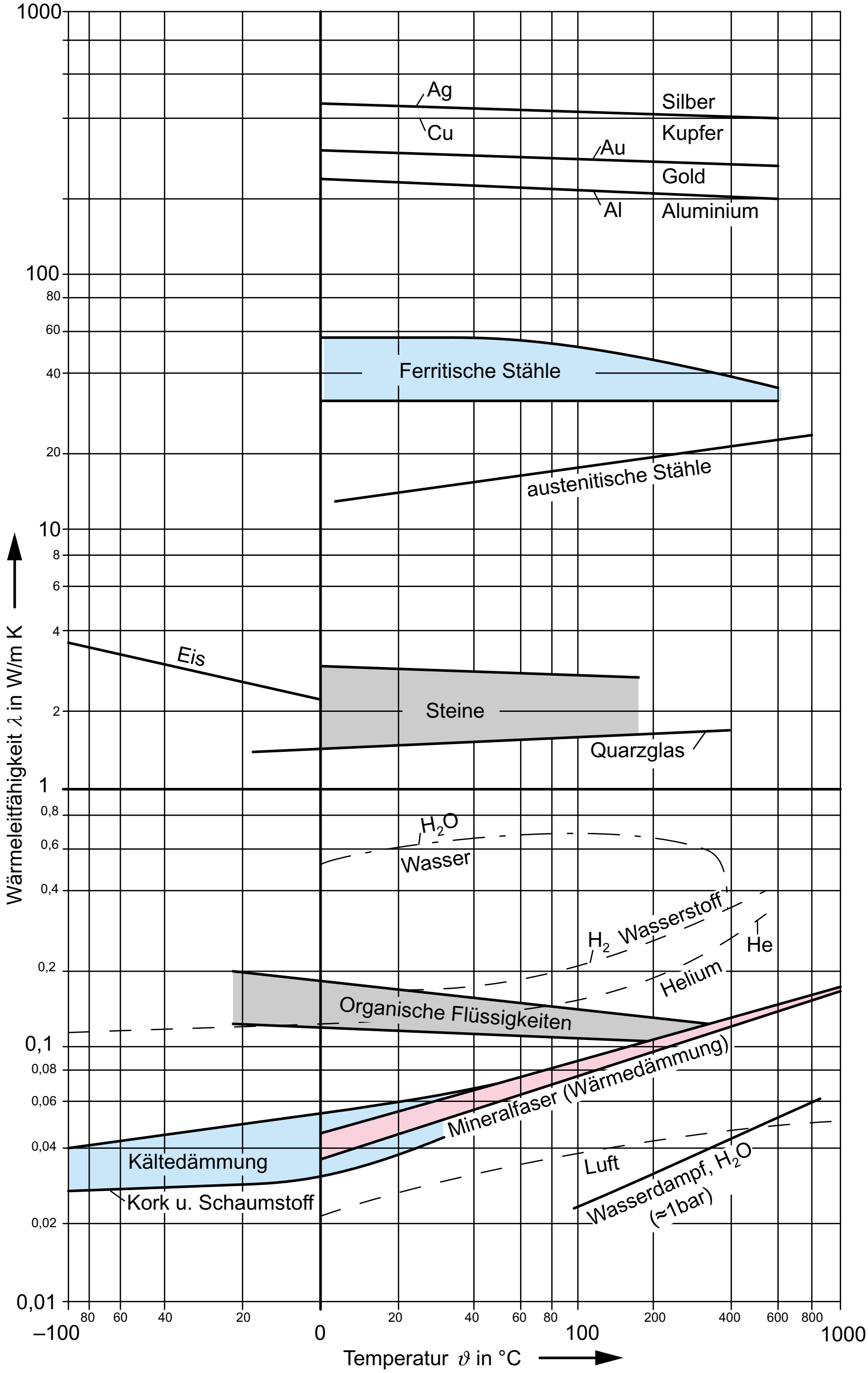
Die **reine** Wärmeleitung tritt nur in Körpern auf, in denen sich die Teilchen des Körpers nicht bewegen. In Gasen und Flüssigkeiten kommen solche unbewegten Schichten selten vor und dann nur in engen Spalten und Kanälen, in denen die Reibung mögliche Bewegungen stark hemmt und natürliche Konvektion unterdrückt.

In Bild 2.2 ist für die verschiedenen Materialien zur Übersicht die Abhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit von der Temperatur $\lambda = f(\vartheta)$ dargestellt, und in den Tabellen 11 im Anhang sind die Zahlenwerte angegeben.

2.1.2 Wärmeleitung durch eine ebene Wand

Durch eine ebene Wand ergibt sich gemäß der

Bild 2.2 Wärmeleitfähigkeit λ der wichtigsten Stoffe in Abhängigkeit von der Temperatur (Gase bei 1 bar) ▶



1000
100
80
60
40
20
10
8
6
4
2
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0,1
0,08
0,06
0,04
0,02
0,01
Wärmeleitfähigkeit λ in W/m K
Ag
Cu
Silber
Kupfer
Au
Gold
Al
Aluminium
Ferritische Stähle
austenitische Stähle
Eis
Steine
Quarzglas
H2O
Wasser
H2 Wasserstoff
He
Helium
Organische Flüssigkeiten
Mineralfaser (Wärmedämmung)
Kältedämmung
Kork u. Schaumstoff
Luft
Wasserdampf, H2O
(≈1bar)
80
60
40
20
20
40
60
80
200
400
600
800
–100
0
100
1000
Temperatur ϑ in °C

Grundgleichung 2.1 eine Wärmestrom von:

$$\dot{Q} = -\lambda \cdot A \cdot \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}x}$$

mit:

$$\dot{Q} \cdot \mathrm{d}x = -\lambda \cdot A \cdot \mathrm{d}\vartheta$$

erhält man bei : $A = \text{konst.}$

$$\dot{Q} \cdot x\Big|_{x_1}^{x_2} = -\lambda \cdot A \cdot \vartheta\Big|_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}$$

sowie mit: $x_2 - x_1 = s$

$$\dot{Q} = \frac{\lambda}{s} \cdot A \cdot (\vartheta_1 - \vartheta_2) \qquad \text{(Gl. 2.9)}$$

Ebene Wand mit mehreren Schichten
Für jede Schicht (Bild 2.3) ist der Wärmestrom gleich. Es gilt somit:

1. Schicht: $\dot{Q} = \frac{\lambda_1}{s_1} \cdot A \cdot (\vartheta_1 - \vartheta_2)$

2. Schicht: $\dot{Q} = \frac{\lambda_2}{s_2} \cdot A \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_3)$

3. Schicht: $\dot{Q} = \frac{\lambda_3}{s_3} \cdot A \cdot (\vartheta_3 - \vartheta_n)$

n. Schicht: $\dot{Q} = \frac{\lambda_n}{s_n} \cdot A \cdot (\vartheta_n - \vartheta_{n+1})$

Durch Umformen erhält man die Temperaturdifferenzen zu:

$$\vartheta_1 - \vartheta_2 = \frac{\dot{Q}}{A} \cdot \frac{s_1}{\lambda_1}$$

$$\vartheta_2 - \vartheta_3 = \frac{\dot{Q}}{A} \cdot \frac{s_2}{\lambda_2}$$

$$\vartheta_3 - \vartheta_n = \frac{\dot{Q}}{A} \cdot \frac{s_3}{\lambda_3}$$

$$\vartheta_n - \vartheta_{n+1} = \frac{\dot{Q}}{A} \cdot \frac{s_n}{\lambda_n}$$

Temperaturdifferenzen addiert ergeben:

$$\vartheta_1 - \vartheta_{n+1} = (\vartheta_1 - \vartheta_2) + (\vartheta_2 - \vartheta_3) + (\vartheta_3 - \vartheta_n) + (\vartheta_n + \vartheta_{n+1})$$

und schließlich:

$$\vartheta_1 - \vartheta_{n+1} = \frac{\dot{Q}}{A} \cdot \left(\frac{s_1}{\lambda_1} + \frac{s_2}{\lambda_2} + \frac{s_3}{\lambda_3} + \frac{s_n}{\lambda_n}\right)$$

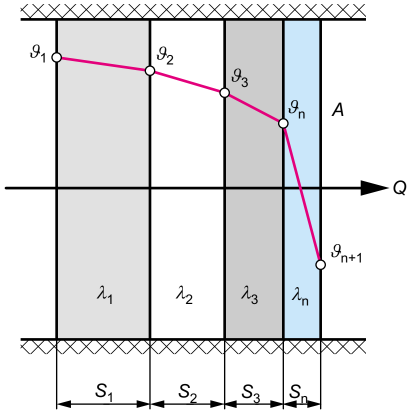


Bild 2.3 Wärmeleitung durch eine mehrschichtige ebene Wand

und damit der gesuchte Wärmestrom aus der Gesamttemperaturdifferenz zu:

$$\dot{Q} = \frac{A \cdot (\vartheta_1 - \vartheta_{n+1})}{\frac{s_1}{\lambda_1} + \frac{s_2}{\lambda_2} + \frac{s_3}{\lambda_3} + \frac{s_n}{\lambda_n}} \qquad \text{(Gl. 2.10)}$$

2.1.3 Wärmeleitung durch einen Hohlzylinder

Während bei der ebenen Wand die Wärmedurchgangsfläche konstant war, ist die wärmedurchströmte Fläche beim Rohr an jedem Radius verschieden $A = f(r)$. Der Wärmestrom selbst muss jedoch konstant sein ($\dot{Q} = \text{konst.}$), und man erhält für eine beliebige Stelle im Zylinder (Bild 2.4):

$$\dot{Q} = -\lambda \cdot A \cdot \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}r}$$

mit: $A = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot L$
(L Zylinderlänge)
ergibt sich:

$$\dot{Q} = -\lambda \cdot 2 \cdot r \cdot \pi \cdot L \cdot \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}r}$$

und umgeformt erhält man die Differentialgleichung:

$$\frac{\mathrm{d}r}{r} = -\lambda \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot L}{\dot{Q}} \cdot \mathrm{d}\vartheta$$

die durch Integration in den Grenzen von r_i bis r_a ergibt:

$$\ln r\Big|_{r_i}^{r_a} = -\lambda \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot L}{\dot{Q}} \cdot \vartheta\Big|_{\vartheta_i}^{\vartheta_a}$$

$$\ln r_a - \ln r_i = -\lambda \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot L}{\dot{Q}} \cdot (\vartheta_a - \vartheta_i)$$

und schließlich:

$$\ln \frac{r_a}{r_i} = \lambda \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot L}{\dot{Q}} \cdot (\vartheta_i - \vartheta_a)$$

Der gesuchte Wärmestrom durch den Hohlzylinder beträgt hiermit:

$$\dot{Q} = \lambda \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot L}{\ln \dfrac{r_a}{r_i}} \cdot (\vartheta_i - \vartheta_a) \qquad \text{(Gl. 2.11)}$$

Man kann auch diese Gleichung 2.11 auf die Grundform der Gleichung der ebenen Wand (Gl. 2.9) umformen, indem man einen Faktor f_R einführt, der sich aus der Gleichsetzungen von Gl. 2.9 und Gl. 2.11 ergibt, wobei als Bezugsfläche die Außenfläche gewählt wird:

$$f_R \cdot \frac{\lambda}{s} \cdot A \cdot (\vartheta_1 - \vartheta_2) = \lambda \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot L}{\ln \dfrac{r_a}{r_i}} \cdot (\vartheta_i - \vartheta_a)$$

mit:

$$\vartheta_1 - \vartheta_2 = \vartheta_i - \vartheta_a$$
$$s = r_a - r_i$$
$$A = A_a = 2 \cdot \pi \cdot r_a \cdot L$$

wird

$$f_R = \frac{r_a - r_i}{r_a \cdot \ln \dfrac{r_a}{r_i}} \qquad \text{(Gl. 2.12)}$$

Damit erhält man:

$$\dot{Q} = \frac{\lambda}{s} \cdot f_R \cdot A_a \cdot (\vartheta_i - \vartheta_a) \qquad \text{(Gl. 2.13)}$$

Wird der Rohrfaktor $f_R = 1$ gesetzt (ebene Wand), dann ergibt sich ein Fehler von:

$$\text{Fehler} = (1 - f_R) \cdot 100\ (\%) \qquad \text{(Gl. 2.14)}$$

Hohlzylinder aus mehreren Schichten

Auch hier gilt, wie bei der mehrschichtigen ebenen Wand, dass der Wärmestrom in jeder Schicht konstant sein muss, und es ist (Bild 2.5):

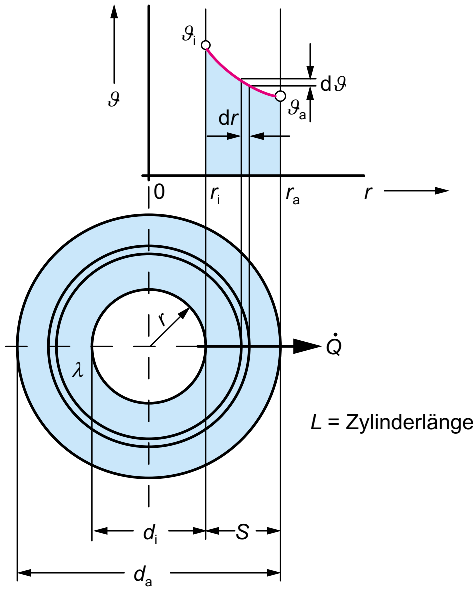


Bild 2.4 Wärmeleitung duch einen Hohlzylinder

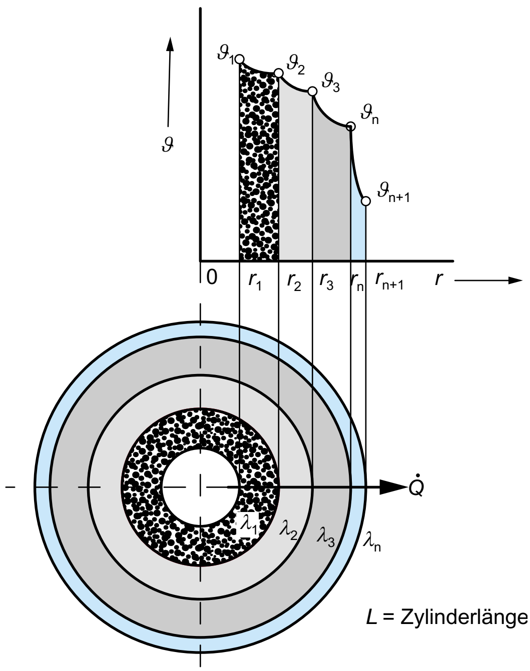


Bild 2.5 Wärmeleitung durch einen mehrschichtigen Hohlzylinder

1. Schicht $\dot{Q} = \dfrac{\lambda_1 \cdot 2 \cdot \pi \cdot L}{\ln \dfrac{r_2}{r_1}} \cdot (\vartheta_1 - \vartheta_2)$

2. Schicht $\dot{Q} = \dfrac{\lambda_2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot L}{\ln \dfrac{r_3}{r_2}} \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_3)$

3. Schicht $\dot{Q} = \dfrac{\lambda_3 \cdot 2 \cdot \pi \cdot L}{\ln \dfrac{r_n}{r_3}} \cdot (\vartheta_3 - \vartheta_n)$

n. Schicht $\dot{Q} = \dfrac{\lambda_n \cdot 2 \cdot \pi \cdot L}{\ln \dfrac{r_{n+1}}{r_n}} \cdot (\vartheta_n - \vartheta_{n+1})$

Die Temperaturdifferenzen erhält somit durch Umformen:

$$\vartheta_1 - \vartheta_2 = \frac{\dot{Q}}{2 \cdot \pi \cdot L} \cdot \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{\lambda_1}$$

$$\vartheta_2 - \vartheta_3 = \frac{\dot{Q}}{2 \cdot \pi \cdot L} \cdot \frac{\ln \frac{r_3}{r_2}}{\lambda_2}$$

$$\vartheta_3 - \vartheta_n = \frac{\dot{Q}}{2 \cdot \pi \cdot L} \cdot \frac{\ln \frac{r_n}{r_3}}{\lambda_3}$$

$$\vartheta_n - \vartheta_{n+1} = \frac{\dot{Q}}{2 \cdot \pi \cdot L} \cdot \frac{\ln \frac{r_{n+1}}{r_n}}{\lambda_n}$$

Durch Addition der Temperaturdifferenzen zur Gesamttemperaturdifferenz:

$$\vartheta_1 - \vartheta_{n+1} = \frac{\dot{Q}}{2 \cdot \pi \cdot L} \cdot \left(\frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{\lambda_1} + \frac{\ln \frac{r_3}{r_2}}{\lambda_2} + \frac{\ln \frac{r_3}{r_3}}{\lambda_3} + \frac{\ln \frac{r_{n+1}}{r_n}}{\lambda_n} \right)$$

Der Wärmestrom ergibt sich daraus in Gl. 2.15:

$$\dot{Q} = \frac{2 \cdot \pi \cdot L \cdot (\vartheta_1 - \vartheta_{n+1})}{\frac{1}{\lambda_1} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\lambda_2} \cdot \ln \frac{r_3}{r_2} + \frac{1}{\lambda_3} \cdot \ln \frac{r_n}{r_3} + \frac{1}{\lambda_n} \cdot \ln \frac{r_{n+1}}{r_n}} \qquad \text{(Gl. 2.15)}$$

2.1.4 Wärmeleitung durch eine Hohlkugel

Auch bei der Hohlkugel gilt das gleiche Grundgesetz wie bei der ebenen Wand bzw. bei den Hohlzylindern:

$$\dot{Q} = -\lambda \cdot A \cdot \frac{d\vartheta}{dr}$$

mit: $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$
ergibt sich:

$$\dot{Q} = -\lambda \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \frac{d\vartheta}{dr}$$

die Differentialgleichung

$$\frac{dr}{r^2} = -\lambda \cdot \frac{4 \cdot \pi}{\dot{Q}} \cdot d\vartheta$$

und durch Integration in den Grenzen von Innen- zu Außenseite:

$$-\frac{1}{r}\bigg|_{r_i}^{r_a} = -\lambda \cdot \frac{4 \cdot \pi}{\dot{Q}} \cdot \vartheta\bigg|_{\vartheta_i}^{\vartheta_a}$$

den Wärmestrom zu:

$$\dot{Q} = \lambda \cdot \frac{4 \cdot \pi}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a}} \cdot (\vartheta_i - \vartheta_a) \qquad \text{(Gl. 2.16)}$$

Der Wärmestrom in einer Hohlkugel nimmt hierbei eine Sonderstellung ein. Wird der Außenradius unendlich groß ($r_a \to \infty$), dann wird im Gegensatz zum Wärmestrom $\dot{Q}$ nicht 0, sondern erreicht einen Mindestwert von:

$$\dot{Q} = \lambda \cdot 4 \cdot \pi \cdot r_i \cdot (\vartheta_i - \vartheta_a) \qquad \text{(Gl. 2.17)}$$

Hohlkugel mit mehreren Schichten
Hier gilt ebenfalls die Ableitung wie bei der mehrschichtigen Wand bzw. dem mehrschichtigen Hohlzylinder, und man erhält schließlich die Gesamttemperaturdifferenz:

$$\vartheta_1 - \vartheta_{n+1} = \frac{\dot{Q}}{4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{1}{\lambda_1} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \left(\frac{1}{\lambda_2} \cdot \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right) + \left(\frac{1}{\lambda_3} \cdot \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_n} \right) + \left(\frac{1}{\lambda_n} \cdot \left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_{n+1}} \right) \right) \right.\right.\right.$$

den Wärmestrom in Gl. 2.18:

$$\dot{Q} = \frac{4 \cdot \pi \cdot (\vartheta_1 - \vartheta_{n+1})}{\frac{1}{\lambda_1} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{1}{\lambda_2} \cdot \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right) + \frac{1}{\lambda_3} \cdot \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_n} \right) + \frac{1}{\lambda_n} \cdot \left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_{n+1}} \right)} \qquad \text{(Gl. 2.18)}$$

2.1.5 Berücksichtigung von Wärme-Übergangswiderständen bei der Wärmeleitung

Dieser in der Praxis sehr häufig zu lösende Fall soll hier bereits behandelt werden.

Bei dem Wärmedurchgang durch eine ein- oder mehrschichtige Wand ergibt sich durch den Wärmeübergangskoeffizienten α von den Begrenzungsflächen zu den umgebenden Medien ein zusätzlicher Widerstand.

Die Bestimmung von α erfolgt in Kapitel 3. Hier soll der Wärmeübergangskoeffizient α gemäß Bild 2.6 nur formal eingeführt werden.
Eintrittsseite:

$$\dot{Q} = \alpha_1 \cdot A \cdot (\vartheta_{Fl,1} - \vartheta_1)$$

Austrittsseite:

$$\dot{Q} = \alpha_2 \cdot A \cdot (\vartheta_3 - \vartheta_{Fl,2})$$

Ergänzt man nun die Temperaturdifferenzen von Abschnitt 2.1.2 mit den Differenzen aus dem Wärmeübergang, ergibt sich analog:

$$\vartheta_{Fl,1} - \vartheta_1 = \frac{\dot{Q}}{A} \cdot \frac{1}{\alpha_1}$$

und

$$\vartheta_3 - \vartheta_{Fl,2} = \frac{\dot{Q}}{A} \cdot \frac{1}{\alpha_2}$$

Gesamttemperaturdifferenz wird damit:

$$\vartheta_{Fl,1} - \vartheta_{Fl,2} = \left(\frac{1}{\alpha_1 \cdot A} + \frac{s_1}{\lambda_1 \cdot A} + \frac{s_2}{\lambda_2 \cdot A} + \frac{1}{\alpha_2 \cdot A} \right) \cdot \dot{Q}$$

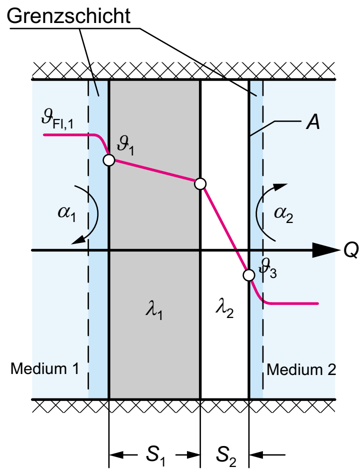


Bild 2.6 Wärmedurchgang von Medium 1 zu Medium 2 durch eine mehrschichtige Wand

Analog zum elektrischen Grundgesetz

$$\Delta U = R_E \cdot I$$

bezeichnet man den Klammerausdruck als Wärmewiderstand R_ϑ

$$\Delta\vartheta = R_\vartheta \cdot \dot{Q} \qquad \text{(Gl. 2.19)}$$

Für die **ebene mehrschichtige Wand** ergibt sich mit Gl. 2.10:

$$R_\vartheta = \frac{1}{\alpha_1 \cdot A} + \left(\frac{1}{A} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{s_i}{\lambda_i} \right) + \frac{1}{\alpha_2 \cdot A} \qquad \text{(Gl. 2.20)}$$

Für den **mehrschichtigen Hohlzylinder** mit Gl. 2.15:

$$R_\vartheta = \frac{1}{\alpha_i \cdot r_i \cdot 2 \cdot \pi \cdot L} + \left(\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot L} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{\lambda_i} \cdot \ln \frac{r_{i+1}}{r_i} \right) + \frac{1}{\alpha_a \cdot r_a \cdot 2 \cdot \pi \cdot L} \quad \text{(Gl. 2.21)}$$

Für die **mehrschichtige Hohlkugel** mit Gl. 2.18:

$$R_\vartheta = \frac{1}{\alpha_i \cdot r_i^2 \cdot 4 \cdot \pi} + \left(\frac{1}{4 \cdot \pi} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{\lambda_i} \cdot \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i+1}} \right) \right) + \frac{1}{\alpha_a \cdot r_a^2 \cdot 4 \cdot \pi} \quad \text{(Gl. 2.22)}$$

Zeichnerische Bestimmung der Temperaturen an den Grenzstellen
Aus der Basisgleichung für den stationären Wärmestrom

$$\dot{Q} = \frac{\Delta\vartheta}{R_\vartheta} = \text{konst.}$$

leitet sich ab, dass die Temperaturdifferenzen $\Delta\vartheta$ der einzelnen Schichten in konstantem Verhältnis stehen zu den zugehörigen einzelnen Wärmewiderständen R_ϑ gemäß Bild 2.7. Es ist zu beachten, dass die Schichtdicke nicht maßstäblich als Längen dargestellt sind, sondern als Wärmewiderstände mit der Einheit (K/W).
Siehe Aufgabe 2.2

2.2 Wärmeleitung mit gleichzeitigem Wärmeübergang an der Oberfläche

Bei der reinen stationären Wärmeleitung stellt sich ein Temperaturgradient gemäß der Grundgleichung Gl. 2.9 ein. Erfolgt jedoch neben der Wärmeleitung in Achsenrichtung gleichzeitig noch ein Wärmeübergang an der Wandoberfläche (s. Kapitel 3), verändert sich der Temperaturverlauf in Achsrichtung wesentlich. Dieses Problem tritt z. B. besonders bei Rippen, Stegen und Stützen auf.

Betrachtet man das Stabelement dx in Bild 2.8, ergibt sich folgende Gleichgewichtsbedingung.
Eintretender Wärmestrom:

$$\dot{Q}_x = -\lambda \cdot A \cdot \frac{d\vartheta}{dx}$$

Austretender Wärmestrom:

$$\dot{Q}_{x+dx} = \dot{Q}_x - \frac{d\dot{Q}}{dx} \cdot dx = -\lambda \cdot A \cdot \frac{d\vartheta}{dx} + \lambda \cdot A \cdot \left(\frac{d^2\vartheta}{dx^2} \right) \cdot dx$$

Hierin ist: $\frac{d\dot{Q}}{dx}$ die Steigung $(-\tan\beta)$ und dx die Schrittweite des Wärmestroms (Bild 2.9).

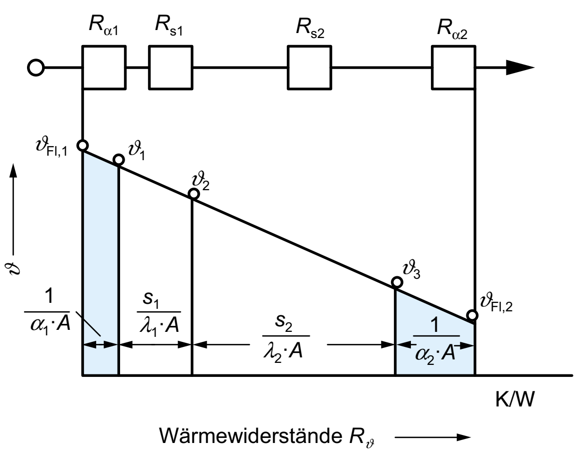


Bild 2.7
Zeichnerische Bestimmung der Temperatur an den Grenzstellen gemäß Bild 2.6 für die mehrschichtige Wand nach Gl. 2.20.
Bei Rohren müssen die Wärmewiderstände gemäß Gl. 2.21 und für die Hohlkugel gemäß Gl. 2.22 aufgetragen werden, um die Temperaturverteilung zeichnerisch zu ermitteln.

Der Wärmeübergang an der Oberfläche zur Umgebung beträgt:

$$d\dot{Q} = \alpha \cdot U \cdot dx \cdot (\vartheta - \vartheta_u)$$

mit: α Wärmeübertragungskoeffizient von der Oberfläche zur Umgebung
und: U Umfang

Aus der Wärmebilanz ergibt sich:

$$\dot{Q}_x - \dot{Q}_{x+dx} = d\dot{Q}$$

dies führt durch Einsetzen der Wärmeströme:

$$-\lambda \cdot A \cdot \frac{d\vartheta}{dx} - \left(-\lambda \cdot A \cdot \frac{d\vartheta}{dx} + \lambda \cdot A \cdot \frac{d^2\vartheta}{dx^2} dx\right)$$

$$= \alpha \cdot U \cdot dx \cdot (\vartheta - \vartheta_u)$$

zu der Differentialgleichung für die Stabtemperatur:

$$\lambda \cdot A \cdot \frac{d^2\vartheta}{dx^2} = \alpha \cdot U \cdot (\vartheta - \vartheta_u)$$

$$\frac{d\vartheta^2}{dx^2} = \frac{\alpha \cdot U}{\lambda \cdot A} \cdot (\vartheta - \vartheta_u)$$

Bei konstanter Umgebungstemperatur erhält man
mit: $\Delta\vartheta = \vartheta - \vartheta_u$
und

$$m = \sqrt{\frac{\alpha \cdot U}{\lambda \cdot A}}$$

schließlich:

$$\boxed{\frac{d^2\Delta\vartheta}{dx^2} = m^2 \cdot \Delta\vartheta} \qquad \text{(Gl. 2.23)}$$

Die Lösung der Differentialgleichung lautet [2.1]:

$$\Delta\vartheta = C_1 \cdot e^{-m \cdot x} + C_2 \cdot e^{m \cdot x} \qquad \text{(Gl. 2.24)}$$

C_1 und C_2 sind die Integrationskonstanten und können durch die Randbedingungen bestimmt werden.

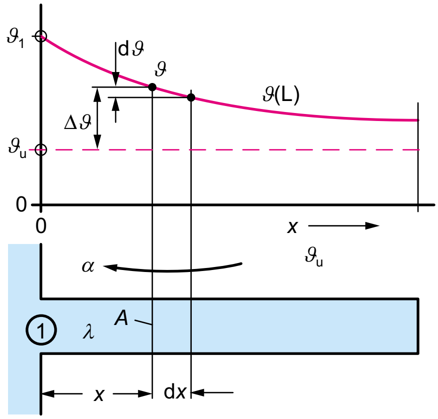


Bild 2.8 Temperaturverlauf entlang einem Stab oder einer Rippe

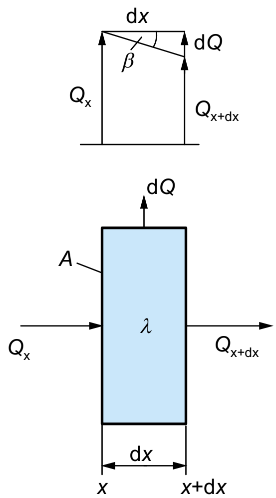


Bild 2.9 Stabelement mit der Steigung und Schrittweite des Wärmestroms

2.2.1 Langer Stab

Randbedingungen

Der Stab sei unendlich lang, so dass am Stabende die gleiche Temperatur herrscht wie in der Umgebung (Bild 2.10).

1. bei: $x = 0$ ist $\Delta\vartheta = \Delta\vartheta_1 = \vartheta_1 - \vartheta_u$
2. bei: $x \to \infty$ ist $\Delta\vartheta = 0$

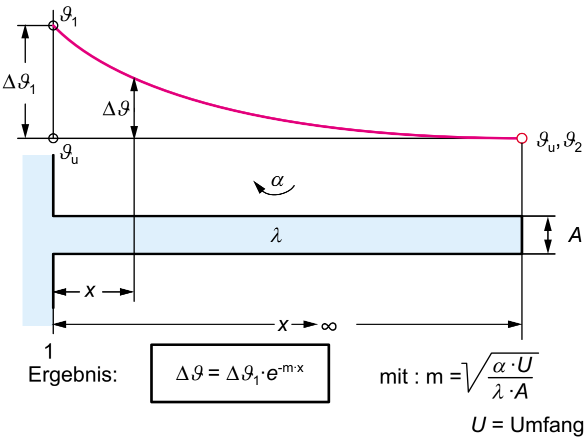


Bild 2.10
Temperaturverlauf an einem sehr langen Stab (Temperatur am Stabende $\vartheta_2 = \vartheta_u$)

Konstantenbestimmung durch die 1. Randbedingung:

$\Delta\vartheta_1 = C_1 \cdot e^{-m \cdot 0} + C_2 \cdot e^{m \cdot 0}$

$\underline{\Delta\vartheta_1 = C_1 + C_2}$

(mit: $e^0 = e^{-0} = 1$)

Konstantenbestimmung durch die 2. Randbedingung:

$0 = C_1 \cdot e^{-m \cdot \infty} + C_2 \cdot e^{m \cdot \infty}$

$\underline{C_2 = 0}$

(mit: $e^{-\infty} = 0$)

Der Temperaturunterschied am Stabanfang ist somit: $\Delta\vartheta_1 = C_1$

Damit erhält man die Bestimmungsgleichung zu:

$$\Delta\vartheta = \Delta\vartheta_1 \cdot e^{-m \cdot x} \qquad \text{(Gl. 2.25)}$$

Die e-Funktion kann aus Bild 2.12 entnommen werden.

2.2.2 Kurzer Stab

Der Stab sei nicht mehr unendlich lang, jedoch die Wärmeübertragung am Stabende sei vernachlässigbar (Bild 2.11):

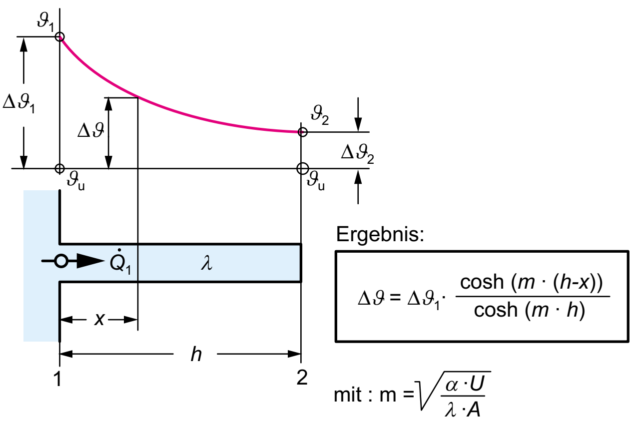


Bild 2.11
Temperaturverlauf an einem Stab mit Übertemperatur am Stabende ($\vartheta_2 \neq \vartheta_u$), jedoch ohne Wärmestrom am Ende des Stabes

1. bei $x = 0$ ist

$$\Delta\vartheta = \Delta\vartheta_1 = (\vartheta_1 - \vartheta_u);$$

wie bei Randbedingung Abschnitt 2.2.1

2. bei $x = h$ ist

$$\left(\frac{d\Delta\vartheta}{dx}\right)_{x=h} = 0$$

Konstantenbestimmung durch die 1. Randbedingung ergibt wie bei Abschnitt 2.2.1

$$\Delta\vartheta_1 = C_1 + C_2$$

Durch die 2. Randbedingung erhält man durch Differenzieren der Gl. 2.24:

$$\frac{d\Delta\vartheta}{dx} = -m \cdot C_1 \cdot e^{-m \cdot h} + m \cdot C_2 \cdot e^{m \cdot h} = 0 \qquad \text{(Gl. 2.25)}$$

$\Big($mit: $\Delta\vartheta = e^{m \cdot x}$

und Differenzieren: $\dfrac{d\Delta\vartheta}{dx} = m \cdot e^{m \cdot x}\Big)$

$$m \cdot C_1 \cdot e^{-m \cdot h} = m \cdot C_2 \cdot e^{m \cdot h}$$

$$C_1 = C_2 \cdot \frac{e^{m \cdot h}}{e^{-m \cdot h}}$$

Durch Einsetzen in das Ergebnis der 1. Randbedingung:

$$\Delta\vartheta_1 = C_2 \cdot \frac{e^{m \cdot h}}{e^{-m \cdot h}} + C_2$$

$$\Delta\vartheta_1 = C_2 \cdot \left(\frac{e^{m \cdot h}}{e^{-m \cdot h}} + 1\right)$$

$$= C_2 \cdot \frac{e^{m \cdot h} + e^{-m \cdot h}}{e^{-m \cdot h}}$$

und damit:

$$C_2 = \Delta\vartheta_1 \cdot \frac{e^{-m \cdot h}}{e^{m \cdot h} + e^{-m \cdot h}}$$

C_1 erhält man hiermit zu:

$$C_1 = \Delta\vartheta_1 \cdot \frac{e^{-m \cdot h}}{(e^{m \cdot h} + e^{-m \cdot h})} \cdot \frac{e^{m \cdot h}}{e^{-m \cdot h}}$$

und schließlich:

$$C_1 = \Delta\vartheta_1 \cdot \frac{e^{m \cdot h}}{e^{m \cdot h} + e^{-m \cdot h}}$$

Werden die Konstanten C_1 und C_2 in die Hauptgleichung Gl. 2.24 eingesetzt, ergibt sich für die Temperaturdifferenz:

$$\Delta\vartheta = \Delta\vartheta_1 \cdot \frac{e^{m \cdot h}}{e^{m \cdot h} + e^{-m \cdot h}} \cdot e^{-m \cdot x}$$

$$+\Delta\vartheta_1 \cdot \frac{e^{-m \cdot h}}{e^{m \cdot h} + e^{-m \cdot h}} \cdot e^{m \cdot x}$$

und mit den e-Funktionen:

$$\Delta\vartheta = \Delta\vartheta_1 \cdot \left(\frac{e^{m \cdot (h-x)} + e^{-m \cdot (h-x)}}{e^{m \cdot h} + e^{-m \cdot h}}\right) \qquad \text{(Gl. 2.26)}$$

Der Klammerausdruck stellt eine Hyperbelfunktion dar, und es ergibt sich:

mit: $\cosh \varphi = \frac{1}{2} \cdot (e^{\varphi} + e^{-\varphi})$

$$\boxed{\Delta\vartheta = \Delta\vartheta_1 \cdot \frac{\cosh(m \cdot (h-x))}{\cosh(m \cdot h)} \qquad \text{(Gl. 2.27)}}$$

Übertemperatur am Stabende

Am Stabende wird die Übertemperatur mit: $x = h$ und damit:

$$\cosh \varphi = 1; \quad (\varphi = m \cdot (h - h) = 0)$$

$$\boxed{\Delta\vartheta_2 = \Delta\vartheta_1 \cdot \frac{1}{\cosh(m \cdot h)} \qquad \text{(Gl. 2.28)}}$$

Die Abhängigkeit der Temperaturdifferenz am Stabende kann unmittelbar aus Bild 2.12 a abgelesen werden.

Bei größeren Rippenstärken kann der Wärmeübergang an der Rippenstirnfläche nicht vernachlässigt werden.

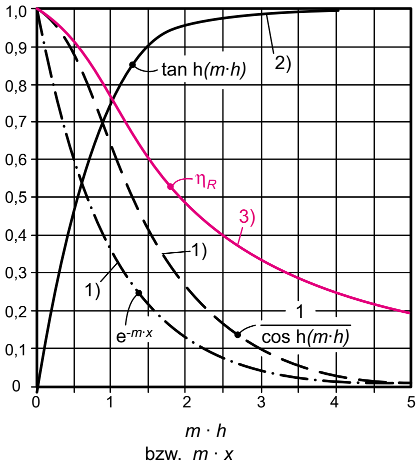


Bild 2.12 a Funktionen für die Berechnung:
1) Temperaturverlauf entlang eines Stabes,
2) Eintrittswärmestrom,
3) Rippenwirkungsgrad η_R

Hierbei lautet dann die Randbedingung:

$x = h$; $\dot{q} = \alpha \cdot \Delta\vartheta_2$ und es wird:

$$\Delta\vartheta = \Delta\vartheta_1 \cdot \frac{\cosh(m \cdot (h-x)) + \dfrac{\alpha}{m \cdot \lambda} \cdot \sinh(m \cdot (h-x))}{\cosh(m \cdot h) + \dfrac{\alpha}{m \cdot \lambda} \cdot \sinh(m \cdot h)} \qquad \text{(Gl. 2.28 a)}$$

und somit am Stabende:

$$\Delta\vartheta_2 = \Delta\vartheta_1 \cdot \frac{1}{\cosh \cdot (m \cdot h) + \dfrac{\alpha}{m \cdot \lambda} \cdot \sinh(m \cdot h)} \qquad \text{(Gl. 2.28 b)}$$

2.2.3 Wärmestrom am Stabanfang

Am Stabanfang ($x = 0$) gilt die Bestimmungsgleichung für den Wärmestrom:

$$\dot{Q}_1 = -\lambda \cdot A \cdot \left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)_{x=0}$$

Mit dem Differential:

$$\frac{d\vartheta}{dx} = -m \cdot C_1 \cdot e^{-m \cdot x} + m \cdot C_2 \cdot e^{m \cdot x}$$

erhält man mit: $x = 0$

$$\frac{d\vartheta}{dx} = m \cdot (C_2 - C_1)$$

Die Konstanten C_2 und C_1 wurden bereits ermittelt mit:

$$C_1 = \Delta\vartheta_1 \cdot \frac{e^{m \cdot h}}{e^{m \cdot h} + e^{-m \cdot h}}$$

und

$$C_2 = \Delta\vartheta_1 \cdot \frac{e^{-m \cdot h}}{e^{m \cdot h} + e^{-m \cdot h}}$$

Damit wird die Steigung der Temperatur am Stabanfang:

$$\frac{d\vartheta}{dx} = -m \cdot \Delta\vartheta_1 \cdot \left(\frac{e^{-m \cdot h} - e^{m \cdot h}}{e^{m \cdot h} + e^{-m \cdot h}}\right)$$

und der gesuchte Wärmestrom durch die Grundfläche des Stabes:

$$\boxed{\dot{Q}_1 = m \cdot \lambda \cdot A \cdot \Delta\vartheta_1 \cdot \frac{e^{m \cdot h} - e^{-m \cdot h}}{e^{m \cdot h} + e^{-m \cdot h}} \qquad \text{(Gl. 2.29)}}$$

Verwendet man wieder die Hyperbelfunktion mit:

$$\tanh\varphi = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}$$

ergibt sich:

$$\boxed{\dot{Q}_1 = m \cdot \lambda \cdot A \cdot \Delta\vartheta_1 \cdot \tanh(m \cdot h) \qquad \text{(Gl. 2.30)}}$$

Ist der Wärmeübergang am Stabende nicht zu vernachlässigen, wird $\dot{Q}_1$:

$$\dot{Q}_1 = m \cdot \lambda \cdot A \cdot \Delta\vartheta_1 \cdot \frac{\tanh(m \cdot h) + \dfrac{\alpha}{m \cdot \lambda}}{1 + \dfrac{\alpha}{m \cdot \lambda} \cdot \tanh(m \cdot h)} \qquad \text{(Gl. 2.30 a)}$$