

Kamprath-Reihe

Dipl.-Ing. Walter Wagner

Strömung und Druckverlust

Mit Beispielsammlung

7. Auflage

Vogel Communications Group

Dipl.-Ing. WALTER WAGNER

Jahrgang 1941, absolvierte nach einer Lehre als Technischer Zeichner ein Maschinenbaustudium und war 1964 bis 1968 Anlagenplaner im Atomreaktorbau; nach einer Ausbildung zum Schweiß-Fachingenieur war er ab 1968 Technischer Leiter im Apparatebau, Kesselbau und in der Wärmetechnik. 1974 bis 1997 bekam Walter Wagner einen Lehrauftrag an der Fachhochschule Heilbronn, von 1982 bis 1984 zusätzlich an der Fachhochschule Mannheim und von 1987 bis 1989 an der Berufsakademie Mosbach. Im Zeitraum 1988 bis 1995 war er Geschäftsführer der Hochtemperatur-Technik Vertriebsbüro Süd GmbH. Seit 1992 ist er Leiter der Beratung und Seminare für Anlagentechnik: WTS Wagner-Technik-Service. Walter Wagner ist außerdem Obmann verschiedener DIN-Normen und öffentlich bestellter und vereidigter Sachverständiger für Wärmeträgertechnik, Thermischer Apparatebau und Rohrleitungstechnik.

Weitere Informationen:

www.vogel-professional-education.de

Dipl.-Ing. WALTER WAGNER ist Autor folgender Vogel Fachbücher der Kamprath-Reihe:

Festigkeitsberechnungen im Apparate-
und Rohrleitungsbau
Kreispumpen und Kreiselpumpenanlagen
Lufttechnische Anlagen
Planung im Anlagenbau
Regel- und Sicherheitsarmaturen
Rohrleitungstechnik
Strömung und Druckverlust
Wärmeaustauscher
Wärmeträgertechnik
Wärmeübertragung
Wasser und Wasserdampf im Anlagenbau
DIETZEL/WAGNER: Technische Wärmelehre
HEMMING/WAGNER: Verfahrenstechnik

Zur Themenreihe gehören ebenfalls
aus dem Vogel Buchverlag:

H. J. Bullack: (CD-ROM)
Berechnung von Druckbehälter-Bauteilen
Berechnung von Sicherheitseinrichtungen
Berechnung von Kunststoffbehältern
Pipe elements / Rohrleitungsbauteile

ISBN 978-3-8343-3273-8

ISBN E-Book 978-3-8343-6341-1

7. Auflage. 2012, digitalisiert 2025

Alle Rechte, auch der Übersetzung, Vorbehalten.
Kein Teil des Werkes darf in irgendeiner Form
(Druck, Fotokopie, Mikrofilm oder einem ande-
ren Verfahren) ohne schriftliche Genehmigung des
Verlages reproduziert oder unter Verwendung
elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt
oder verbreitet werden.

Hiervon sind die in §§ 53, 54 UrhG ausdrücklich
genannten Ausnahmefälle nicht berührt.

Printed in Germany

Copyright 1990, 2025 by

Vogel Communications Group
GmbH & Co. KG, Würzburg

Vogel Communications Group GmbH & Co. KG
Max-Planck-Straße 7/9
97082 Würzburg
Tel.: +49 931 418-0

Fragen zur Produktsicherheit:
produktsicherheit@vogel.de

Vorwort

Bedingt durch die unmittelbare physikalische Verbindung der Strömungstechnik mit den Problemen des Druckverlustes, die in der Praxis meistens gemeinsam behandelt werden müssen, ist es vorteilhaft, keines dieser Fachgebiete ohne Berücksichtigung der gegenseitigen Beeinflussungsfaktoren zu behandeln.

Als bestimmende, gemeinsame Parameter für diese Fachgebiete seien die Grenzschicht, die Turbulenz und die Ablösung herausgestellt, deren Behandlung ein weiterer Bereich eingeräumt wurde.

Der „praktische“ Charakter dieses Buches soll auf die Auswertung und Darstellung der Gesetzmäßigkeiten, auf praktische Probleme hinweisen, wobei die Strömung in und um Rohre den größten Raum einnimmt.

Eine der wesentlichen Aufgaben dieses Buches ist, nicht möglichst viele Versuchsergebnisse zusammenzustellen, sondern die prinzipielle Abhängigkeit eines Problems darzulegen. Damit soll auch dem in der Praxis tätigen Fachmann die Möglichkeit gegeben werden, ein anstehendes strömungstechnisches Problem einzukreisen und notfalls abzuschätzen.

Dieses Buch ist gedacht für Ingenieure und Techniker aus dem Rohrleitungsbau, der Verfahrenstechnik, Versorgungstechnik, Energietechnik, aus dem Strömungsmaschinenbau und ähnlichen Fachgebieten sowie nicht zuletzt auch für Studierende der Fachrichtungen Maschinenbau und Verfahrenstechnik.

Neben Grundkenntnissen der Mathematik und Physik sind keine besonderen Grundlagen für das Verständnis des Buches erforderlich.

Im Anhang dieses Buches sind zahlreiche Beispiele aufgeführt und durchgerechnet. Mit Hilfe dieser praxisnahen Aufgaben und deren Lösungsgängen soll es dem Leser möglich sein, ähnliche Aufgaben in seiner Berufspraxis oder im Studium lösen zu können. Die Beispiele wurden so ausgewählt, daß in der Praxis immer wiederkehrende Aufgaben anhand der angegebenen Musterrechnungen in kürzester Zeit gelöst werden können.

Dem Vogel Buchverlag danke ich für die gewohnt hervorragende Zusammenarbeit.

Resonanz zum Buch und den vermittelten Lösungswegen ist mir stets willkommen, weil ein lebendiger Wissensaustausch Forschungs- und Lehrbetrieb immer wieder motivieren und inspirieren kann.

Den schnellsten Kontakt erfüllt eine E-Mail: wagner@wts-online.de.

St. Leon-Rot

Walter Wagner

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	5
Formelzeichen und Einheiten	11
1 Einleitung	13
2 Grundgesetze der reibungsfreien Strömung	13
2.1 Kontinuitätsgleichung	14
2.2 Energiegleichung	14
2.2.1 Energieformen in einem Strömungssystem	14
2.2.1.1 Kinetische Energie	14
2.2.1.2 Potentielle Energie	16
2.2.1.3 Druck-Energie	17
2.2.1.4 Innere Energie	17
2.2.2 Bernoullische Gleichung	17
2.3 Druck-Definition in einer Strömung	19
2.3.1 Gesamtdruck	19
2.3.2 Kinetischer Druck (Dynamischer Druck)	19
2.4 Strömung in gekrümmten Bahnen	19
2.4.1 Druckänderungen senkrecht zur Strömung	19
2.4.2 Geschwindigkeitsverteilung in einer gekrümmten Strömung	20
2.5 Impulsgleichung	22
2.5.1 Rohrkrümmer	23
2.5.2 Staudruck gegen Flächen	24
2.5.3 Bewegte Platte	25
2.5.4 Rückstoßkraft	25
2.5.5 Impulsstrommoment (Drehimpuls)	26
3 Innere Flüssigkeitsreibung (Viskosität)	27
4 Strömungsformen	29
4.1 Laminare Rohrströmung	29
4.2 Turbulente Strömung	31
5 Grenzschichten	31
5.1 Laminare Grenzschicht	31
5.1.1 Einlaufänge im laminar durchströmten Rohr	33
5.1.2 Grenzschichtdicke aus der Impulsstromgleichung	34
5.2 Turbulente Grenzschicht	37
5.2.1 Turbulente Grenzschichtdicke	41
5.2.2 Dicke der laminaren Unterschicht bei glatten Rohren	43
5.2.3 Einlaufänge im turbulent durchströmten Rohr	44
5.2.4 Universelles Geschwindigkeitsverteilungsgesetz	45
6 Ablösung und Wirbelbildung	50
6.1 Durchströmte Körper	50
6.2 Umströmte Körper	50
6.2.1 Grenzschichtdicke bei quer angeströmten Körpern	54
6.2.2 Grenzschichtdicke am Kreiszylinder	55

6.3	Querschnittsveränderungen	56
6.3.1	Unstetige Querschnittserweiterung	56
6.3.2	Stetige Querschnittserweiterung	57
6.3.3	Unstetige Querschnittsverengung	58
6.3.4	Stetige Verengungen	59
6.3.5	Verengungen und Erweiterungen	59
7	Druckverlust	65
7.1	Druckverlust in Rohrsystemen	65
7.1.1	Nicht kreisförmige Querschnitte	66
7.2	Druckverlustdefinition	67
7.3	Druckverlust in Gasleitungen bei großem Druckabfall	67
7.3.1	Druckabfall bei isothermer Strömung	69
7.3.2	Druckabfall bei adiabater Strömung	70
7.4	Laminare Rohrströmung	70
7.5	Turbulente Rohrströmung	72
7.5.1	Turbulente Strömung in rauen Rohren	74
7.5.2	Berechnung	76
7.5.3	Vollkommen raue Rohre	76
7.5.4	Gesamter Bereich	77
7.5.5	Rohrrauigkeit	78
7.5.6	Übergangsgebiet von laminarer zu turbulenter Strömung	84
7.5.7	Reibungszahl λ bei Metallschläuchen	84
7.6	Rohreinlaufverluste	91
7.6.1	Laminare Strömung	91
7.6.2	Turbulente Strömung	92
7.7	Druckabfall in gekrümmten Rohren	93
7.7.1	Geometrie der Rohrschlange	94
7.7.2	Laminare Strömung	95
7.7.3	Turbulente Strömung	96
7.7.3.1	Widerstand in ebenen Rohrschlangen	97
7.8	Druckverlust in Rohrbögen	98
7.9	Druckverlust im Krümmer und Knie	102
7.10	Druckverlust für sonstige Formstücke	107
7.10.1	Widerstandsbeiwerte für Einbauten	112
7.10.2	Widerstandsbeiwerte für Rohrleitungsorgane	115
7.10.3	Armaturen	115
7.10.4	Rückschlagarmaturen	119
7.10.5	Schmutzfänger	119
7.11	Bezugssystem für die Druckverlustbestimmung	120
8	Flächenwiderstand	121
8.1	Laminare Grenzschicht der ebenen, glatten Platte	121
8.2	Turbulente Grenzschicht der ebenen, glatten Platte	121
8.2.1	Rauhe Platten	123
9	Form- und Gesamtwiderstand	124
9.1	Druckverlustbeiwert eines Einzelrohres	126
9.1.1	Druckverlustbeiwert einer einzelnen Rohrreihe	127
9.1.2	Druckverlustbeiwert von Rohrbündeln	128
9.1.3	Strömungsmerkmale am querangeströmten Rohr und Rohrbündel	128

9.2	Berechnung des Druckverlustes im Rohrbündel mit Hilfe des Druckverlustbeiwertes ξ	132
9.2.1	Berechnung des Druckverlustbeiwertes	134
9.2.2	Einfluß der Temperaturabhängigkeit der Stoffwerte	136
9.2.3	Einfluß der Anzahl der Rohrreihen	136
9.2.4	Zusammenfassende Gleichungen des Druckverlustbeiwertes	138
9.3	Strömungsverluste bei quer angeströmten Rohrbündeln mit Hilfe des Reibungsbeiwertes λ_{aq}	139
9.4	Druckverlust in Schüttungen	143
10	Ausgewählte Themen der Strömungstechnik	145
10.1	Strömungsverteilung und Sammlung	145
10.2	Anlagendruckverlust	146
10.2.1	1-Strang-Systeme	146
10.2.2	Verzweigte Systeme	148
10.2.2.1	Rohrsysteme	149
10.2.2.2	Gesamtwiderstand	150
10.3	Schwebegeschwindigkeit	150
10.4	Schallgeschwindigkeit (Druckfortpflanzungsgeschwindigkeit)	152
10.5	Strömung durch Lochscheiben	155
10.6	Druckverlust bei Einbauten im Kanalsystem	158
10.6.1	Druckverlust bei Versperrung mit einem Körper	158
10.6.2	Druckverlust bei einem Körper mit Formwiderstand	159
10.6.3	Druckverlust im Wärmetauscher	161
10.7	Strömungsbegrenzung bei Flüssigkeiten durch Kavitation	162
10.7.1	Kavitationszahl σ	163
10.7.2	Kavitationszahlen	164
10.8	Strömungsbegrenzung bei Gasen durch Schallgeschwindigkeit	165
10.8.1	Totaler Druck, totale Temperatur und totale Dichte	167
10.8.2	Widerstandsbeiwerte	168
10.9	Strömungsverteilung zwischen Verteiler und Sammler	169
10.10	Widerstandsbeiwerte von Verteiler und Sammler	169
10.10.1	Verteiler mit konstantem Querschnitt über die Länge	169
10.10.2	Sammler mit konstantem Querschnitt über die Länge	170
10.10.3	Verteiler und Sammler in U-Form (mit konstantem Querschnitt)	170
10.10.4	Verteiler und Sammler in Z-Form (mit konstantem Querschnitt)	171
10.11	Strömungsverteilung bei Apparateanströmung	171
10.12	Korrekturglied für die kinetische Energie in der Bernoullischen Gleichung (Coreolis-Koeffizient)	172
10.13	Verlustbeiwert bei einer das System verlassenden Strömung	172
10.14	Flüssigkeitsgasströmung	173
11	Zusammenstellung der wichtigsten Gleichungen	175
12	Stoffwerte	196
13	Beispiele	203
1	Bestimmung des Ruhedruckunterschiedes eines Schornsteins	203
2	Bestimmung des Volumenstromes am Rohrkrümmer	203
3	Reaktionskraft am Rohrkrümmer	204
4	Reaktionskraft an einer stehenden und bewegten Platte	205
5	Ausflußgeschwindigkeit und Reaktionskraft an einem Behälter	206

6	Geschwindigkeiten, Drehmoment und Leistungsaufnahme an einem Pumpenlauftrad	206
7	Grenzsichtdicke an einer ebenen Platte	208
8	Strömungszustände im Rohr	209
9	Wirbelablösung an einem quer angeströmten Rohr	209
10	Stoßverlust an einer plötzlichen Querschnittserweiterung	210
11	Druckverlust in einem Rohrwinkel	211
12	Druckverlust in einer Wasserrohrleitung	213
13	Druckverlust in einer Heizölrohrleitung	216
14	Bestimmung der Rohrrauigkeit	219
15	Druckverlust in Abhängigkeit vom Rohrdurchmesser	221
16	Rechteckschlitz – hydraulischer Durchmesser und Druckverlust bei laminarer Strömung	224
17	Hintereinanderschaltung von Widerständen	227
18	Parallelschaltung von Widerständen	231
19	Beliebige Schaltung von Widerständen	234
20	Hydraulischer Durchmesser und Druckverlust im Rohrbündelwärmeaustauscher	236
21	Heißwasseranlage mit Naturumlauf	239
22	Pumpenanlage	243
23	Widerstandsbeiwerte von Armaturen	246
24	Kennzeichnung von Stellventilen	249
25	Druckverlust durch Armaturengruppe am Erdgasbrenner	250
26	Erhitzeranlage mit Naturzug	252
27	Lufterhitzeranlage mit Gebläse	256
28	Windkanal	263
29	Schornsteinzugstärke	267
30	Einfluß der Druckverluste auf die Schornsteinhöhe	268
31	Grenzgeschwindigkeit zur Unterteilung von kompressibler und inkompressibler Luftströmung	271
32	Vergleich von inkompressibler und kompressibler Strömung	273
33	Druckabfall bei isothermer Druckluftströmung	274
34	Druckabfall bei adiabatischer Dampfströmung	276
35	Zulässiger Rohrwiderstandsbeiwert bei adiabatischer Dampfströmung	278
36	Zulässige Einzelwiderstände bei adiabatischer Heißdampfströmung	279
37	Isotherme Strömung in einer Ferngasleitung	280
38	Adiabatische Erdgasströmung mit kritischer Geschwindigkeit am Leitungsende	282
39	Wasser-Volumenstrombestimmung mittels Meßblende	288
40	Druckluft-Volumenstrombestimmung mittels Meßblende	289
41	Heißdampf-Volumenstrombestimmung mittels Düse	292
42	Feuchte-Luft-Volumenstrombestimmung mittels Normventuridüse	295
43	Wasser-Volumenstrombestimmung mittels Meßblende und U-Rohr-Quecksilber-Differenzdruckmanometer	297
44	Auslegung von Drosselscheiben	299
45	Überschlägige Bestimmung der Widerstandsbeiwerte von Blende und Düse	300
46	Druckverlust am Glatrohrbündel	303
47	Druckverlust einer Wärmeträgeranlage	306
48	Strömungsverteilung bei Apparateanströmung	309
Bildbeispiele ausgeführter Bauteile und Anlagen		311
Literaturverzeichnis		315
Stichwortverzeichnis		317

Formelzeichen und Einheiten

Die nachfolgenden wichtigsten Zeichen werden nach Möglichkeit grundsätzlich angewendet, wobei Abweichungen von diesen Formelzeichen jeweils bei den entsprechenden Gleichungen genannt sind.

Formelzeichen	Bedeutung	Einheit	Beziehung auf die Basiseinheiten und Bemerkungen
A	Fläche, Querschnittsfläche	m ²	
a	Beschleunigung	m/s ²	
c	Widerstandsbeiwert	—	
c _p	Spezifische isobare Wärmekapazität	J/kg K	
c _v	Spezifische isochore Wärmekapazität	J/kg K	
D, d	Durchmesser	m	
E	Energie	J	1 J = 1 N m = 1 W s = 1 VAs = 1 kg m ² /s ²
F	Kraft	N	1 N = 1 kg m/s ²
f	Frequenz	Hz	1 Hz = 1/s
f	Funktion von..., Faktor	—	
g	Fallbeschleunigung	m/s ²	
H	Höhe	m	
I	Impuls	Ns	1 Ns = 1 kg m/s
$\dot{I}$	Impulsstrom	N	1 N = kg m/s ²
i	Impulsstromdichte	N/m ² , Pa	1 Pa = N/m ² = kg/s ² m
k	Rauhigkeitshöhe	m	
k _s	Sandrauhigkeitshöhe	m	
L	Länge	m	
M	Masse	kg	
$\dot{M}$	Massenstrom	kg/s	
$\dot{m}$	Massenstromdichte	kg/m ² s	$\dot{m} = \dot{M}/A$
m	Öffnungsverhältnis	—	
Mo	Moment	N m	1 N m = 1 J = 1 Ws
n	Drehzahl	1/s	
n	Reihenzahl	—	
n	Exponent	—	
P	Leistung	W	1 W = J/s = 1 Nm/s = 1 VA = 1 kg m ² /s ³
p	Druck	N/m ² , Pa	1 Pa = 1 N/m ² = 1 kg/s ² m
R, r	Radius	m	
R	Gaskonstante	J/kg K	
s	Schichtdicke, Wanddicke, Weglänge	m	
T	Kelvin-Temperatur	K	
t	Zeit	s	
U	Umfang	m	
u	Komponente der Geschwindigkeit	m/s	
V	Volumen	m ³	
$\dot{V}$	Volumenstrom	m ³ /s	
v	Spezifisches Volumen	m ³ /kg	$v = V/M = 1/\rho$

Formelzeichen	Bedeutung	Einheit	Beziehung auf die Basiseinheiten und Bemerkungen
v	Komponente der Geschwindigkeit	m/s	
W	Arbeit	J	$1\text{ J} = 1\text{ Nm} = 1\text{ Ws} = 1\text{ VAs}$ $= 1\text{ kg m}^2/\text{s}^2$
w	Geschwindigkeit	m/s	
w _τ	Schubspannungsgeschwindigkeit	m/s	
x	Koordinate in Strömungsrichtung	—	
y	Koordinate quer zur Strömungsrichtung	—	
α	Durchflußzahl	—	
β	Winkel	rad	
δ	Grenzschichtdicke	m	
ζ	Widerstandszahl	—	
η	Dynamische Viskosität	Pa s	$1\text{ Pa s} = 1\text{ Ns}/\text{m}^2 = 1\text{ kg}/\text{s m}$
η	Wirkungsgrad	—	
θ	Celsius-Temperatur	°C	$^{\circ}\text{C} = T - 273,15\text{ K}$
λ	Rohrreibungszahl	—	
μ	Kontraktionszahl	—	
ν	Kinematische Viskosität	m ² /s	$\nu = \eta/\rho$
ρ	Dichte	kg/m ³	
τ	Schubspannung	N/m ² , Pa	$1\text{ Pa} = 1\text{ N}/\text{m}^2 = 1\text{ kg}/\text{s}^2\text{ m}$
ψ	Hohlraumanteil	—	

Vorzeichen

- Δ Differenz
- Σ Summe

Exponenten

- mittel
- auf die Zeit bezogene Größe
- ∧ maximal
- ∨ minimal
- ~ wechselnd
- Vektor

Indizes

- a außen
- äq äquivalent
- d Bezug auf einen Durchmesser
- dyn dynamisch
- ges gesamt
- h hydraulisch
- i innen

- id ideal
- kin kinetisch
- krit kritisch
- L Bezug auf eine Länge
- l laminar
- n Normalkomponente
- O Bezug auf Oberfläche
- proj projiziert
- st statisch
- t turbulent
- th thermisch
- zul zulässig
- o Anfangswert, Ruhewert
- 1 Anfang, Eingang, festgelegter Zustand
- 2 Ende, Ausgang, festgelegter Zustand
- ∞ unendlich

Kenngößen

- Reynolds-Zahl $Re = \frac{w \cdot L}{\nu}$
- Strouhal-Zahl $Sr = \frac{f \cdot d}{w}$

1 Einleitung

Bei oberflächlicher Betrachtung der Strömungstechnik, kann aus der Fülle der in dem Schrifttum vorliegenden Gleichungen, bei Vernachlässigung der oft nicht angegebenen Randbedingungen, fast jeder gewünschte Wert „hingerechnet“ werden.

Es ist daher unumgänglich neben den z. T. idealisierten theoretischen Grundlagen, ein „Fingerspitzengefühl“ für die Aufstellung der Randbedingungen zu entwickeln. Oft wird es erst dann möglich, mit den einfachsten Grundgleichungen, verknüpft mit richtig gewählten Koeffizienten, Faktoren und Konstanten, den wahren Verhältnissen sehr nahe zu kommen. Man soll auch nicht meinen, daß nur die „längste“ Formel, ausgerechnet mit dem Computer, die besten Ergebnisse gibt. Gerade hier hat sich in der Praxis gezeigt, daß das „Fingerspitzengefühl“ sowie der Überblick über die Problematik oftmals verlorengelassen kann, bzw. Gleichungen unkritisch von vorhandenen Programmen übernommen werden.

Grundsätzliche Überlegungen und Ableitungen bei der Aufstellung der Gleichungen sollen auf physikalischen Grundlagen basieren. Empirische Gleichungen werden deshalb so weit wie möglich vermieden.

Grobe Fehler, die in der Praxis auftreten, entstehen im wesentlichen nicht durch zu ungenaue oder einfache Rechnungen, sondern weil überhaupt gerechnet wurde. Daher sollten die in der Praxis verwendeten Gleichungen „übersichtlich“ und auch einfach zu handhaben sein. Es sind Formelgrößen zu vermeiden, die erst durch verschiedene Stoffdaten und geometrische Größen bestimmt werden müssen. Iterationsrechnungen wurden gleichfalls vermieden.

Daher wird nicht versucht, alle möglichen und denkbaren Einsatzgebiete zu erfassen, sondern gemäß Problemstellung und Anwendungskreis, die genauesten und wirtschaftlichsten Gleichungssysteme anzugeben. Wesentliche Randbedingung ist die bevorzugte Berücksichtigung und Behandlung von Rohren oder rohrähnlichen Bauelementen.

Rohre sind das hauptsächliche Konstruktionselement der Verfahrens-, Kälte-, Wärme- und Energietechnik. Dort ergibt sich eine Durchmesser-Anwendungsbereich von $d = 5$ bis 500 mm, der den größten Teil einer Häufigkeitsverteilung erfaßt. Bevorzugt sind Durchmesser zwischen 10 und 150 mm, wobei der größte Bedarf zwischen 15 und 50 mm liegt. Berücksichtigt man noch den Bereich der Strömungsgeschwindigkeit mit $0,5$ bis 5 m/s für Flüssigkeiten und 5 bis 50 m/s für Gase, wobei die maximalen Anwendungsfälle bei 1 bis 3 m/s für Flüssigkeiten und 10 bis 30 m/s für Gase liegen, dann ergibt sich bereits eine Eingrenzung der Randbedingungen für praktische Anwendungen.

Strömungstechnisch gelten für Dämpfe die Gleichungen der Gase, trotzdem Dämpfe thermodynamisch keine Gase sind.

2 Grundgesetze der reibungsfreien Strömung

Die Grundgesetze der reibungsfreien Strömung basieren auf der Erhaltung der Massen und Energien.

2.1 Kontinuitätsgleichung

In einem Kontrollsystem ohne Massenabzweigung und Massenzuführung gilt gemäß dem Erhaltungsgesetz der Masse an der Stelle 1 und 2 in **Bild 1** die Beziehung:

$$\dot{M}_1 = \dot{M}_2 \quad (1)$$

und mit $\dot{M} = \dot{V} \cdot \rho$ wird:

$$\dot{V}_1 \cdot \rho_1 = \dot{V}_2 \cdot \rho_2 \quad (2)$$

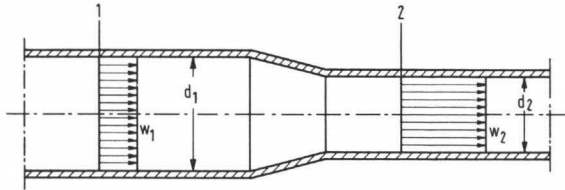


Bild 1 Geschwindigkeitsänderung in einem sich verjüngenden Rohr von w_1 auf w_2

Durch die Grundgleichung: $\dot{V} = w \cdot A$ ergibt sich die Kontinuitätsgleichung zu:

$$w_1 \cdot A_1 \cdot \rho_1 = w_2 \cdot A_2 \cdot \rho_2 \quad (3)$$

Bei technischen Berechnungen kann die Änderung der Dichte des strömenden Fluids oft vernachlässigt werden. Dies ist bei Flüssigkeiten fast immer zulässig, da der Ausdehnungskoeffizient klein ist und das Volumen durch Druck kaum verändert wird. Auch bei Gasen gilt diese Vereinfachung in den meisten Fällen. Wird z.B. eine Volumenänderung von 10% bei Luft noch als vernachlässigbar betrachtet, so kann der Dichteunterschied bis zu einer Strömungsgeschwindigkeit von 160 m/s, bzw. einem Höhenunterschied von 1000 m unberücksichtigt bleiben. Mit $\rho_1 = \rho_2$ wird somit:

$$w_1 \cdot A_1 = w_2 \cdot A_2 \quad (4)$$

In kreisförmigen Querschnitten ergibt sich, mit $A = d^2 \cdot \pi / 4$ eine Geschwindigkeitsabhängigkeit vom Durchmesser zu:

$$w_1 \cdot \frac{d_1^2 \cdot \pi}{4} = w_2 \cdot \frac{d_2^2 \cdot \pi}{4} \quad (5)$$

$$w_2 = w_1 \cdot \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^2 \quad (6)$$

2.2 Energiegleichung

In einer reibungsfreien Strömung müssen die Summen der einzelnen Energieformen an jeder Stelle im System gleich sein.

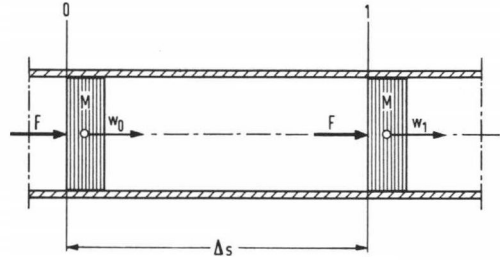
2.2.1 Energieformen in einem Strömungssystem

2.2.1.1 Kinetische Energie

Wirkt auf eine ruhende Masse M in **Bild 2** die Kraft F über eine Wegstrecke Δs ein, so ist Arbeit, bzw. Energie E aufzubringen, die ausschließlich in der Masse gespeichert ist.

$$E = F \cdot \Delta s \quad (7)$$

Bild 2 Veranschaulichung des kinetischen Energieaufwandes bei der Bewegung der Masse M um die Wegstrecke Δs



Gemäß dem dynamischen Grundgesetz der Masse nach NEWTON:

Kraft gleich Masse mal Beschleunigung mit:

$$F = M \cdot a \quad (8)$$

folgt:

$$E = M \cdot a \cdot \Delta s \quad (9)$$

Die Beschleunigung ergibt sich aus der Geschwindigkeitsänderung $\Delta w = w_1 - w_0$ durch die Einwirkzeit der Kraft Δt mit:

$$a = \frac{\Delta w}{\Delta t} \quad (10)$$

Die kinetische Energie einer Masse beträgt damit:

$$E_{kin} = M \cdot \frac{\Delta w}{\Delta t} \cdot \Delta s \quad (11)$$

Der zurückgelegte Weg Δs einer Masse läßt sich berechnen aus:

$$\Delta s = \bar{w} \cdot \Delta t \quad (12)$$

Hierin ist $\bar{w}$ die mittlere konstante Geschwindigkeit, mit der die Masse den Weg von der Stelle 0 bis 1 durchläuft.

$$\bar{w} = \frac{w_1 + w_0}{2} \quad (13)$$

Damit wird:

$$E_{kin} = M \cdot \frac{(w_1 - w_0)}{\Delta t} \cdot \frac{(w_1 + w_0)}{2} \cdot \Delta t \quad (14)$$

In einer bewegten Masse ist somit an maximaler kinetischer Energie gespeichert, wenn $w_0 = 0$ gesetzt wird. Damit ergibt sich die kinetische Energie zu:

$$E_{kin} = M \cdot \frac{w^2}{2} \quad (15)$$

Diese Gleichung gilt auch bei veränderlicher Kraft F entlang dem Weg Δs . Dies läßt sich wie folgt begründen:

$$E_{kin} = \int_{s_1}^{s_2} F \cdot ds = \int_{s_1}^{s_2} M \cdot a \cdot ds = M \int_{s_1}^{s_2} a \cdot ds$$

Mit: $a = \frac{dw}{dt}$ und $ds = w \cdot dt$ wird:

$$E_{kin} = M \int_{s_1}^{s_2} \frac{dw}{dt} \cdot w \cdot dt = M \int_{w_1}^{w_2} w \cdot dw = M \left[\frac{w^2}{2} \right]_{w_1}^{w_2}$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} M \cdot w_2^2 - \frac{1}{2} M \cdot w_1^2$$

setzt man $w_1 = 0$ und $w_2 = w$ ergibt sich:

$$E_{kin} = M \cdot \frac{w^2}{2}$$

2.2.1.2 Potentielle Energie

Die potentielle Energie E_p einer Masse ist gegenüber der kinetischen Energie E_{kin} eine Energie der Lage. Soll gemäß **Bild 3** die Masse M von dem Bezugsniveau H_1 auf das Niveau H_2 angehoben werden, so ist nach Gl. 8 eine Kraft F erforderlich.

$$F = M \cdot a \quad (16)$$

Bei einer Lagenenergie muß die Erdbeschleunigung $a = g$ überwunden werden.

$$F = M \cdot g \quad (17)$$

Analog zu Gl. 9 ergibt sich aus dem Energiesatz:

Kraft F mal Weg H , die potentielle Energie zu:

$$E_p = M \cdot g \cdot H \quad (18)$$

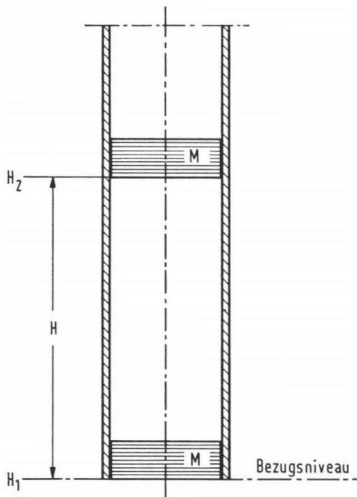


Bild 3 Veranschaulichung des potentiellen Energieaufwandes für die Niveauänderung der Masse M um H

Ein Zusammenhang zwischen potentieller und kinetischer Energie läßt sich unmittelbar ableiten. Wird die Masse M aus der Höhelage H_2 auf das Bezugsniveau H_1 abgeworfen, dann wandelt sich die gesamte potentielle Energie $M \cdot g \cdot H$ in die kinetische Energie $M \cdot w^2/2$ um. Dadurch ergibt sich:

$$M \cdot g \cdot H = M \cdot \frac{w^2}{2} \quad (19)$$

und die Geschwindigkeit der Masse beträgt in Bezugsniveauhöhe:

$$w = (2 \cdot g \cdot H)^{1/2} \quad (20)$$

2.2.1.3 Druck-Energie

Die Druckenergie E_v kann auch als Verschiebearbeit bezeichnet werden. Nach **Bild 4** ergibt sich als erforderliche Arbeit für die Verschiebung des Volumens V von der Stelle 0 zur Stelle 1 durch den Druck p um den Weg Δs gemäß der Grundgleichung der Energie aus Kraft ($F = p \cdot A$) mal Weg Δs (Gl. 7):

$$E_v = p \cdot A \cdot \Delta s \quad (21)$$

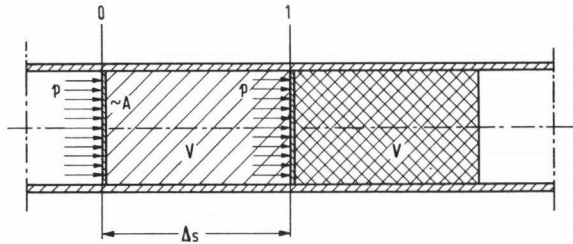
mit $\Delta s = \frac{V}{A}$ wird:

$$E_v = p \cdot V \quad (22)$$

oder mit: $V = \frac{M}{\rho}$

$$E_v = p \cdot \frac{M}{\rho} \quad (23)$$

Bild 4 Veranschaulichung der Druck-Energie, bei Verschiebung des Volumens V um die Wegstrecke Δs



Hier ist zu merken, daß in einer ruhenden Flüssigkeit der Druck in allen Richtungen gleich ist.

2.2.1.4 Innere Energie

Die thermische Bewegungsenergie der Moleküle, bzw. Atome in einem Fluid bezeichnet man als innere Energie U ; sie ist gleich der gespeicherten Wärmemenge. Die primäre Abhängigkeit ist somit die Temperatur. Da es sich in der Strömungstechnik im wesentlichen um isotherme Zustände handelt, kann die Änderung der inneren Energie ΔU sehr oft vernachlässigt werden.

2.2.2 BERNOULLI'sche Gleichung

Aus dem Erhaltungssatz der Energien ergibt sich für die reibungsfreie Strömung aus der Summe der einzelnen Energien an jeder Stelle im System der gleiche Betrag. Addiert man nun die einzelnen Energieformen, erhält man die nach BERNOULLI benannte Gleichung:

$$E_{kin} + E_p + E_v = \text{const.} \quad (24)$$

und eingesetzt ergibt sich:

$$M \frac{w^2}{2} + M \cdot g \cdot H + p \frac{M}{\rho} = \text{const.} \quad (25)$$

Bezieht man diesen Erhaltungssatz der Energien auf die Stellen 1 und 2 in **Bild 5**, dann ergibt sich:

$$M \frac{w_1^2}{2} + M \cdot g \cdot H_1 + p_1 \cdot \frac{M}{\rho} = M \frac{w_2^2}{2} + M \cdot g \cdot H_2 + p_2 \cdot \frac{M}{\rho} \quad (26)$$

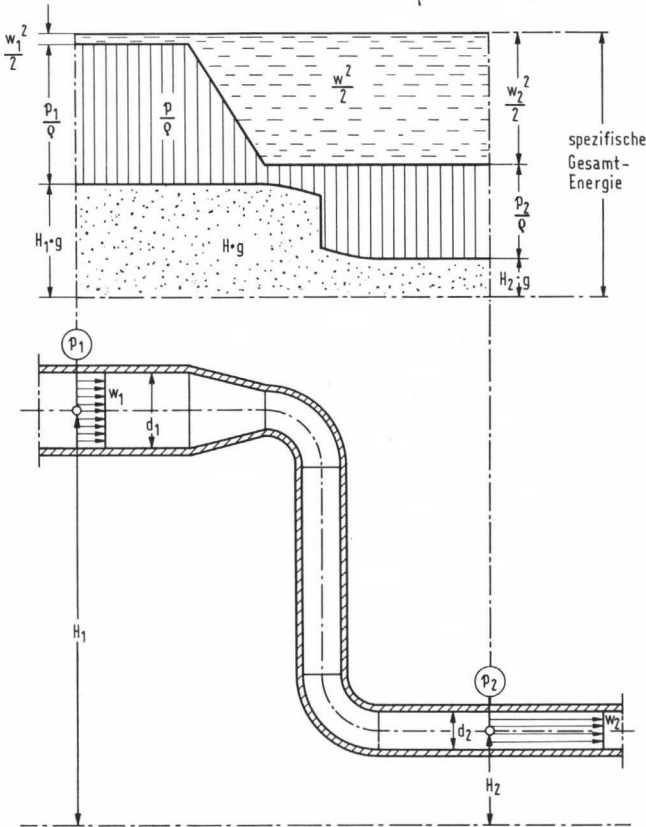


Bild 5 Darstellung der einzelnen Energieanteile in einer Strömung entlang einer Rohrleitung (BERNOULLI'sche Gleichung)

Da die Massen M gleich sind, erhält man die spezifischen auf $M=1 \text{ kg}$ bezogenen Energien zu:

$$\frac{w_1^2}{2} + g \cdot H_1 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{w_2^2}{2} + g \cdot H_2 + \frac{p_2}{\rho} \quad (27)$$

Die Einheit dieser Gleichung ist:

$$\frac{\text{J}}{\text{kg}} = \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{kg}} = \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

Durch Multiplikation der Gl. 27 mit der Dichte erhält man die spezifischen Energien bezogen auf das Volumen $V = 1 \text{ m}^3$ zu:

$$\rho \cdot \frac{w_1^2}{2} + \rho \cdot g \cdot H_1 + p_1 = \rho \cdot \frac{w_2^2}{2} + \rho \cdot g \cdot H_2 + p_2 \quad * \quad (28)$$

* s. a. Beispiel 1

Die Einheit der Gl. 28 ist:

$$\frac{\text{J}}{\text{m}^3} = \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{m}^3} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}^2}$$

2.3 Druck-Definitionen in einer Strömung

2.3.1 Gesamtdruck p_{ges}

Gemäß der spezifischen Energiegleichung Gl. 28 ergibt sich ein Gesamtdruck p_{ges} der Strömung zu (**Bild 6**):

$$p_{\text{ges}} = p_{\text{st}} + \rho \cdot \frac{w^2}{2} \quad (29)$$

Wird die Strömung an einer Stelle zur Ruhe gebracht ($w = 0$), dann wandelt sich die kinetische Energie in statischen Druck um und an dieser Stelle herrscht der höchste Druck, der in der ganzen Strömung auftreten kann.

2.3.2 Kinetischer Druck (Dynamischer Druck) p_{dyn}

Die Differenz aus dem Gesamtdruck p_{ges} und dem statischen Druck p_{st} ist gleich dem kinetischen Druck p_{dyn} .

$$p_{\text{dyn}} = p_{\text{ges}} - p_{\text{st}} \quad (30)$$

$$p_{\text{dyn}} = \rho \cdot \frac{w^2}{2} \quad (31)$$

2.4 Strömung in gekrümmten Bahnen

2.4.1 Druckänderungen senkrecht zur Strömung

Bei der geraden Strömung ist der Druck senkrecht zur Strömungsrichtung konstant. Wird jedoch eine Strömung in einer gekrümmten Bahn geführt, dann treten Zentrifugalkräfte an der Masse M auf, die durch Drucksteigerungen aufgenommen werden müssen.

Um die prinzipielle Abhängigkeit leicht ableiten zu können, soll an einem vereinfachten Beispiel (**Bild 7**) die Berechnung durchgeführt werden:

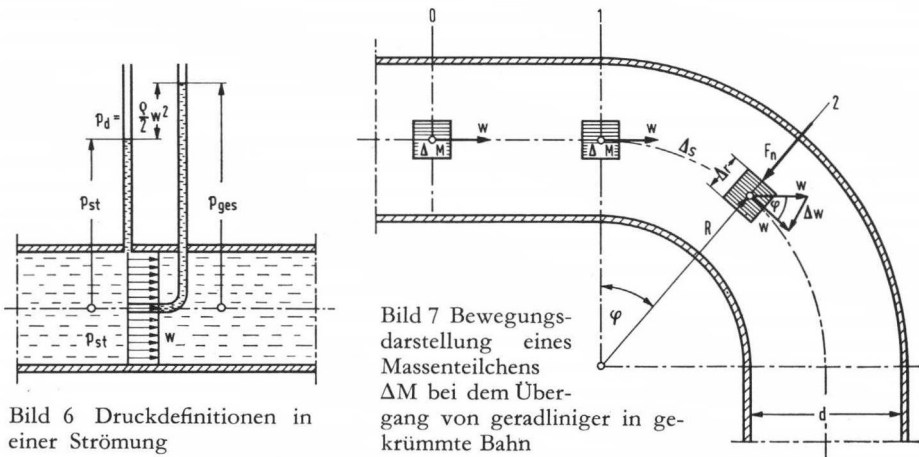


Bild 6 Druckdefinitionen in einer Strömung

Bild 7 Bewegungsdarstellung eines Massenteilchens ΔM bei dem Übergang von geradliniger in gekrümmte Bahn

Eine Masse ΔM bewege sich geradlinig auf der mittleren Strombahn eines Rohres mit der Geschwindigkeit w (Punkt o). Erreicht dieses Massenteilchen den Beginn der Krümmung an der Stelle 1, dann muß eine Kraft F_n in Richtung zum Drehmittelpunkt vorhanden sein, damit die Masse ΔM um den Geschwindigkeitsbetrag Δw_n abgelenkt wird. Aus dem Grundgesetz der Mechanik erhält man diese Kraft zu:

$$F_n = \Delta M \cdot a_n \quad (32)$$

Die Normalbeschleunigung a_n ergibt sich aus:

$$a_n = \frac{\Delta w_n}{\Delta t} \quad (33)$$

Die Zeit Δt errechnet sich aus dem bis zur Stelle 2 zurückgelegten Weg Δs , dividiert durch die Bahngeschwindigkeit w .

$$a_n = \frac{\Delta w_n \cdot w}{\Delta s} \quad (34)$$

mit:

$$\Delta s = R \cdot \arccos \varphi$$

Für kleine Winkel φ ist

$$\arccos \varphi = \sin \varphi = \tan \varphi$$

und man erhält mit:

$$\Delta w_n = w \cdot \sin \varphi$$

die Normalbeschleunigung zu:

$$a_n \approx \frac{w^2}{R} \quad (35)$$

Die Kraft F_n beträgt damit:

$$F_n = \Delta M \cdot \frac{w^2}{R} \quad (36)$$

Der an der Oberkante des Massenteilchens zusätzliche Druck Δp ergibt sich aus:

$$\Delta p = \frac{F_n}{\Delta A} = \frac{\Delta M}{\Delta A} \cdot \frac{w^2}{R}$$

Mit:

$$\Delta M = \Delta V \cdot \rho = \Delta A \cdot \Delta r \cdot \rho$$

wird:

$$\Delta p = \Delta r \cdot \rho \cdot \frac{\bar{w}^2}{R} \quad (37)$$

Mit dieser Gleichung läßt sich auch die Größenordnung des Druckunterschiedes in einem Rohrkrümmer berechnen, wenn man für $\Delta r = d$ einsetzt:

$$\Delta p = d \cdot \rho \cdot \frac{\bar{w}^2}{R} \quad * \quad (38)$$

2.4.2 Geschwindigkeitsverteilung in einer gekrümmten Strömung

Da die Summe der Energien konstant sein muß, ergibt sich durch den Druckanstieg in einer gekrümmten Bahn nach außen hin eine Reduzierung der kinetischen Energie in diese Richtung. Aus **Bild 8** ergibt sich:

* s. a. Beispiel 2

Energiegleichung:

$$p_1 + \rho \cdot \frac{w_1^2}{2} = p_2 + \rho \cdot \frac{w_2^2}{2}$$

wobei:

$$p_2 = p_1 + \Delta p$$

hierin ist Δp der Druckanstieg gemäß Gl. 37 mit:

$$\Delta p = \Delta r \cdot \rho \cdot \frac{w^2}{R}$$

Damit wird die Energiegleichung:

$$\frac{w_1^2}{2} = \Delta r \cdot \frac{\bar{w}^2}{R} + \frac{w_2^2}{2} \quad (39)$$

mit:

$$\bar{w} = \frac{w_1 + w_2}{2}$$

sowie:

$$\Delta r = R_2 - R_1$$

und:

$$R = \frac{R_1 + R_2}{2}$$

erhält man durch Einsetzen dieser Werte in Gl. 39:

$$w_1 \cdot R_1 = w_2 \cdot R_2 = w \cdot R = \text{const.} \quad (40)$$

Die sich aus Gl. 40 ergebende Geschwindigkeitsverteilung nach **Bild 9** nennt man „Potentialwirbel“. Dieses Geschwindigkeits-Verteilungsgesetz (Drallsatz) wird insbesondere bei der Berechnung von Spiralgehäusen und Zyklonberechnungen zugrundegelegt.

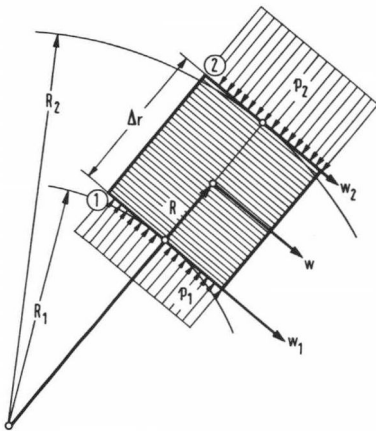


Bild 8 Aus einer gekrümmten Strömungsbahn herausgegriffenes Massenteilchen

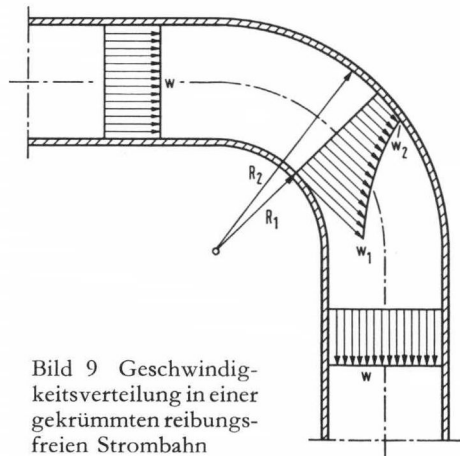


Bild 9 Geschwindigkeitsverteilung in einer gekrümmten reibungsfreien Strombahn

2.5 Impulsgleichung

Der Impuls I ist definiert als Masse M mal Geschwindigkeit w . Hierbei ist unbedingt zu berücksichtigen, daß der Impuls ein Vektor ist, der die Richtung der Geschwindigkeit besitzt.

$$\vec{I} = M \cdot \vec{w} \quad (41)$$

Vergleicht man diese Gleichung mit dem Grundgesetz der Mechanik (2. NEWTONSches Axiom):

$$\vec{F} = M \cdot \vec{a} = M \frac{d\vec{w}}{dt}$$

ergibt sich:

$$\vec{F} \cdot dt = M \cdot d\vec{w}$$

mit $d\vec{I} = M \cdot d\vec{w}$ wird:

$$\vec{F} = \frac{dI}{dt} = d\dot{I} \quad (42)$$

Dies ist eine wichtige Verallgemeinerung des mechanischen Grundgesetzes, denn sie gilt auch bei veränderlicher Masse.

Die Impulsänderung in einer Zeiteinheit ist somit gleich der Gesamtsumme der an der Masse angreifenden Kräfte.

Aus Gl. 42 erhält man:

$$\vec{F} = \frac{d(M \cdot \vec{w})}{dt}$$

und mit der Produktregel die allgemeine Gleichung

$$\vec{F} = M \cdot \frac{d\vec{w}}{dt} + \vec{w} \frac{dM}{dt} \quad (43)$$

Betrachtet man jedoch die in der Strömungstechnik überwiegend vorherrschenden konstanten Massenströme, deren Geschwindigkeit und Richtung geändert werden, erhält man einfache Differenzengleichungen wie:

$$\vec{F} = \frac{M}{\Delta t} \cdot \Delta \vec{w}$$

Mit:

$$\frac{M}{\Delta t} = \dot{M} = \text{Massenstrom}$$

ergibt sich:

$$\vec{F} = \dot{M} \cdot \Delta \vec{w} = \Delta \dot{I} = \dot{I}_2 - \dot{I}_1 \quad (44)$$

$\dot{I}$ bezeichnet man als Impulsstrom.

$$\dot{I} = \dot{M} \cdot \vec{w}$$

Der Impulsstromsatz der Strömungstechnik lautet dann:

$$\Sigma \vec{F} = \dot{M} (\vec{w}_2 - \vec{w}_1) = \dot{M} \cdot \vec{w}_2 - \dot{M} \cdot \vec{w}_1 \quad (45)$$

Für ein Bilanzgebiet gilt somit, daß die vektorielle Summe sämtlicher äußeren Kräfte $\Sigma \vec{F}$ gleich dem Austrittsimpulsstrom $\dot{M} \cdot \vec{w}_2$ abzüglich dem Eintrittsimpulsstrom $\dot{M} \cdot \vec{w}_1$ ist.

Mit:

$$\dot{M} = \rho \cdot w \cdot A$$

wird Gl. 45

$$\Sigma \vec{F} = A_2 \cdot \rho \cdot \vec{w}_2^2 - A_1 \cdot \rho \cdot \vec{w}_1^2 \quad (46)$$

Der Impulsstrom beträgt somit:

$$\dot{I} = A \cdot \rho \cdot w^2$$

Und die Impulsstromdichte

$$i = \frac{\dot{I}}{A}$$

wird:

$$i = \rho \cdot w^2$$

Bedingt durch die drei Erhaltungssätze von Masse (Kontinuitätsgleichung), Energie (BERNOULLI'sche Gleichung) und Kräfte (Impulsströme) in der Strömungstechnik, ist es vorteilhaft, an einigen praktischen Beispielen den Impulssatz darzustellen.

2.5.1 Rohrkrümmer

In dem in **Bild 10** gekennzeichneten Bilanzgebiet ergibt sich aus dem Impulsstromsatz (Gl. 45) eine resultierende Aktionskraft $\vec{F}_A$, die durch eine entgegengesetzte Reaktionskraft $\vec{F}$ im Gleichgewicht gehalten wird, nach dem Grundsatz der Mechanik von „activ = reactiv“.

$$\vec{F} = -\vec{F}_A \quad (47)$$

Zur Addition und Subtraktion von Vektoren sei vermerkt, daß neben dem Zahlenwert des Impulsstromes $\dot{M} \cdot \vec{w}$ der Richtungssinn der Geschwindigkeit beachtet werden muß. Trägt man an den Vektor $(\dot{M} \cdot w_2)$ gemäß **Bild 10** durch Parallel-

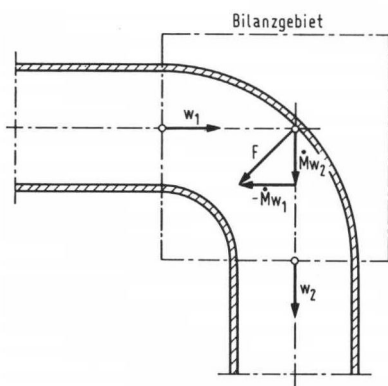


Bild 10 Anwendung der Impulsstromgleichung auf das Bilanzgebiet eines Rohrkrümmers

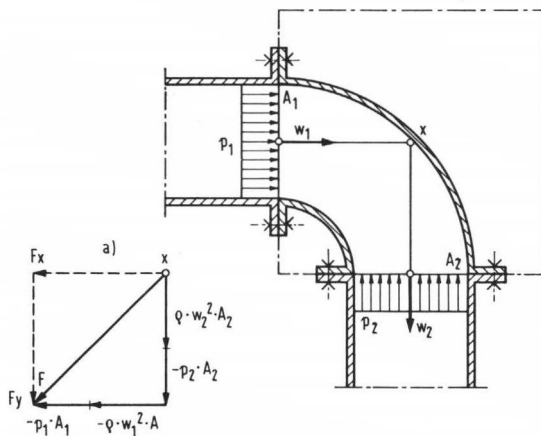


Bild 11 Anwendung des Impulsstromsatzes auf Rohrkrümmer einschließlich der äußeren Druckkräfte p_1 und p_2

verschiebung den Vektor $(\dot{M} \cdot \vec{w}_1)$ an, dann erhält man die Addition von Vektoren zu:

$$\dot{M} \cdot \vec{w}_2 + \dot{M} \cdot \vec{w}_1 = \dot{M} (\vec{w}_2 + \vec{w}_1) \quad (48)$$

Die Subtraktion, die beim Impulsstromsatz gefordert wird, erhält man durch Addition des Vektors $\vec{w}_2$ mit $-\vec{w}_1$. Es ist also:

$$\dot{M} \vec{w}_2 - \dot{M} \vec{w}_1 = \dot{M} \vec{w}_2 + (-\dot{M} \vec{w}_1) = \dot{M} [\vec{w}_2 + (-\vec{w}_1)] \quad (49)$$

Sind an den Rohrkrümmern noch Flüssigkeitsdruckkräfte p_1 und p_2 als äußere Kräfte vorhanden, so ergibt sich gemäß **Bild 11** folgende Gleichung:

Als Summe aller äußeren Kräfte ist erforderlich:

$$\Sigma F = \dot{M} \cdot \vec{w}_2 - \dot{M} \cdot \vec{w}_1$$

und mit Gl. 46:

$$\dot{M} = \rho \cdot w \cdot A$$

wird:

$$\vec{F} + \vec{p}_1 \cdot A_1 + \vec{p}_2 \cdot A_2 = A_2 \cdot \rho \cdot \vec{w}_2^2 - A_1 \cdot \rho \cdot \vec{w}_1^2$$

Damit ergibt sich als äußere Reaktionskraft auf den Krümmerfestpunkt:

$$\vec{F} = A_2 \cdot \rho \cdot \vec{w}_2^2 - A_1 \cdot \rho \cdot \vec{w}_1^2 - \vec{p}_1 \cdot A_1 - \vec{p}_2 \cdot A_2 \quad (50)$$

Diese Gleichung ist in **Bild 11** als Vektordiagramm dargestellt. Formt diese Gleichung noch etwas weiter um, dann ergibt sich:

$$\vec{F} = A_2 (\rho \vec{w}_2^2 - \vec{p}_2) - A_1 (\rho \vec{w}_1^2 + \vec{p}_1) \quad * \quad (51)$$

Hierin ist zu beachten, daß durch die Vektordarstellung der Druck p_2 nicht größtmäßig abgezogen, sondern „umgedreht“ wird und somit in Richtung des Austrittsimpulsstromes wirkt. Die auf die Schraubenverbindung der Flansche wirkenden Kräfte erhält man durch geometrisches Zerlegen der Kraft F gemäß Bild 11a.

2.5.2 Staudruck gegen Flächen

Eine wichtige praktische Anwendung des Impulsstromsatzes ergibt sich auch bei der Kräftebestimmung von angeströmten Flächen. Wird eine Platte gemäß **Bild 12** senkrecht angeströmt, dann erhält man:

$$\vec{F} = \left(\frac{\dot{M}}{2} \vec{w}_2 + \frac{\dot{M}}{2} \vec{w}_2 \right) - \dot{M} \cdot \vec{w}_1$$

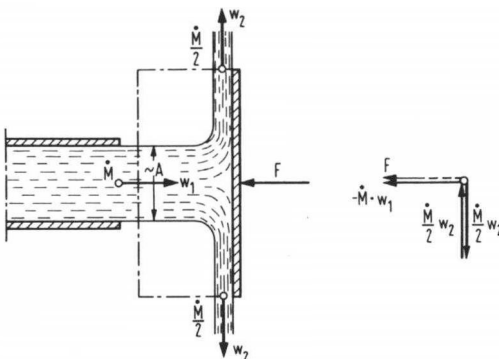


Bild 12 Staudruck mit Vektordiagramm bei einer mit einem Flüssigkeitsstrahl angeströmten ebenen Platte

* s. a. Beispiel 3

Da die austretenden Impulsströme entgegengesetzte Richtungen besitzen, heben sich diese bei der Vektoraddition auf und man erhält gemäß **Bild 12** eine der Geschwindigkeit w_1 entgegengerichtete Kraft von:

$$F = -\dot{M} \cdot w_1 \quad (52)$$

oder mit:

$$\begin{aligned} \dot{M} &= A \cdot \rho \cdot w \\ F &= -A \cdot \rho \cdot w_1^2 \end{aligned} \quad * \quad (53)$$

2.5.3 Bewegte Platte

Bewegt sich die angeströmte Platte mit einer Eigengeschwindigkeit u von der Düse weg, dann ergibt sich bei fortbewegtem Bezugssystem folgende Überlegung:

Der austretende Impulsstrom hebt sich gemäß **Bild 12** durch die entgegengesetzten Richtungen auf. Der eintretende Impulsstrom ergibt sich aus der in das bewegte Bezugssystem einströmenden relativen Masse $\dot{M} = A \cdot \rho \cdot (w_1 - u)$ und der relativen Einströmgeschwindigkeit $w = w_1 - u$. Damit ergibt sich für das bewegte System gemäß **Bild 13**:

$$F = A \cdot \rho \cdot (w_1 - u)^2 \quad * \quad (54)$$

2.5.4 Rückstoßkraft

Die Rückstoßkraft (Aktionskraft) der ausströmenden Flüssigkeit aus einem Behälter beträgt (**Bild 14**):

$$F_A = \dot{M} \cdot w$$

Die Ausströmgeschwindigkeit ergibt sich gemäß Gl. 20 zu

$$w = (2 \cdot g \cdot H)^{1/2} \quad **$$

und mit:

$$\dot{M} = A \cdot \rho \cdot w$$

wird:

$$F_A = A \cdot \rho \cdot w \cdot (2 \cdot g \cdot H)^{1/2}$$

Setzt man hier ebenfalls nochmals für w die Gl. 20 ein, erhält man:

$$F_A = A \cdot \rho \cdot 2 \cdot g \cdot H \quad ** \quad (55)$$

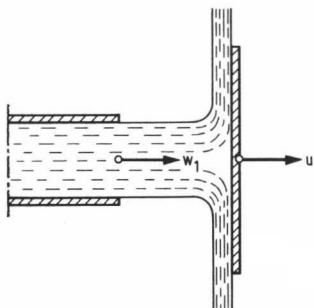


Bild 13 Aufprall eines Flüssigkeitsstrahls auf eine sich mit der Geschwindigkeit u fortbewegenden Platte

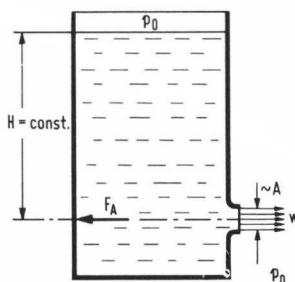


Bild 14 Rückstoßkraft F_A einer mit der Geschwindigkeit w ausströmenden Flüssigkeit aus einem Behälter

* s. a. Beispiel 4

** s. a. Beispiel 5

2.5.5 Impulsstrommoment (Drehimpuls)

Gemäß dem Grundgesetz der Mechanik ergibt sich ein Moment aus Kraft mal Hebelarm (**Bild 15**):

$$M_o = F \cdot r$$

und mit Verwendung der Kräfte aus der Änderung des Impulsstromes ergibt sich das Moment in der Strömungstechnik zu:

$$M_o = \Delta \dot{I} \cdot r$$

Mit

$$\Delta \dot{I} = \dot{M} \cdot \Delta w$$

wird:

$$M_o = \dot{M} \cdot \Delta (\vec{w} \cdot r) \tag{56}$$

Für ein Rotationssystem gilt, daß die vektorielle Änderung des Impulsstrommomentes gleich dem Drehmoment der an das System angreifenden äußeren Kräfte ist.

Im Kreiselmaschinenbau wird (Gl. 56) hauptsächlich angewendet. Bei einem Pumpenlaufrad, z.B. gemäß **Bild 16** ergibt sich eine Geschwindigkeitskomponente u

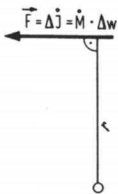


Bild 15 Grafische Darstellung des Impulsstrommomentes

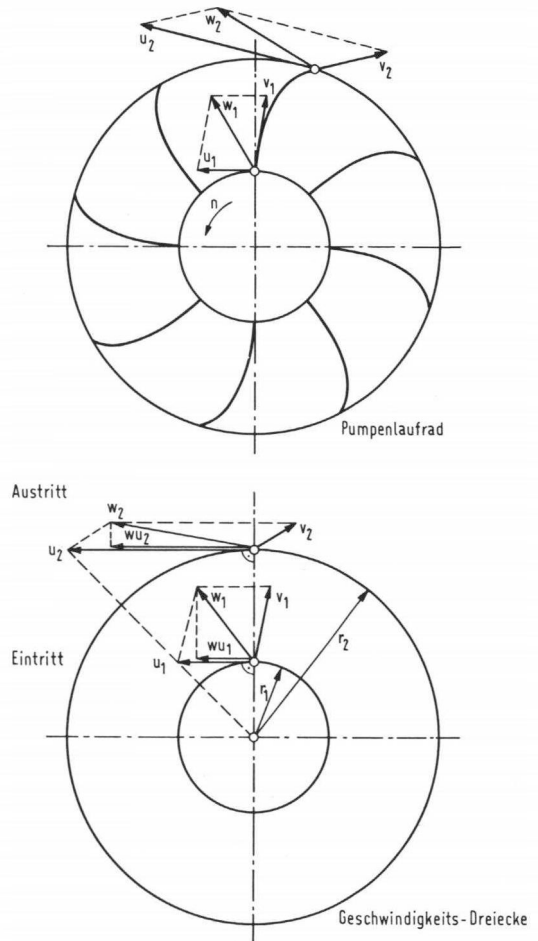


Bild 16 Darstellungen zur Ermittlung des Impulsstrommomentes am Beispiel eines Pumpenlaufrades

rechtwinklig zum Radius durch die Drehzahl n . Der einströmende Flüssigkeitsmassenstrom $\dot{M}$ wird durch die Form der Laufradschaufeln in Richtung dieser Schaufelkanten mit der Geschwindigkeit v gelenkt. Die Absolutgeschwindigkeit w ergibt dann durch vektorielle Addition der Geschwindigkeit u und v . Die Umfangskomponenten w_u der Absolutgeschwindigkeiten w , rechtwinklig zu den Radien, ergeben sich durch Zerlegen der Absolutgeschwindigkeit gemäß **Bild 16**.

Das von außen aufzuwendende Drehmoment M_o ist:

$$M_o = \dot{M} (r_2 \cdot w_{u,2} - r_1 \cdot w_{u,1}) = \rho \cdot \dot{V} \cdot \Delta (w_u \cdot r) \quad * \quad (57)$$

Dieses Hauptgesetz der Strömungsmaschinen bezeichnet man auch als „EULERsche Gleichung“. Bei $M_o = 0$, wie dies im Spiralgehäuse einer Pumpe gefordert wird, ergibt sich auch der bereits in Gl. 40 erwähnte Potentialwirbel mit $r \cdot w_u = \text{const.}$

3 Innere Flüssigkeitsreibung (Viskosität)

Durch die Anhangskräfte (Adhäsion) einer Flüssigkeit, nimmt diese an den Grenzflächen zur festen Wand die Geschwindigkeit der Oberfläche an. Bewegt sich z.B. nach **Bild 17** die auf einer Flüssigkeitsoberfläche liegende Platte mit der Geschwindigkeit w_1 und ruht die untere Platte, dann ist eine Kraft F erforderlich. Diese Kraft ergibt sich nach NEWTON zu:

$$F = A \cdot \eta \cdot \frac{w_1}{s} \quad (58)$$

oder allgemein:

$$F = A \cdot \eta \cdot \frac{dw}{ds} \quad (59)$$

Als Schubspannung ergibt sich mit:

$$\tau = \frac{F}{A}$$

zu

$$\tau = \eta \cdot \frac{dw}{ds} \quad (60)$$

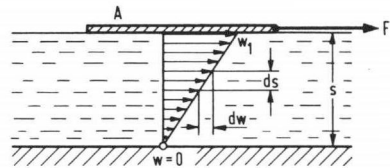


Bild 17 Geschwindigkeitsverteilung in einer viskosen Flüssigkeit zwischen einer bewegten Platte und einer festen Wand

Das Verhalten vieler technischer Fluide läßt sich durch diese idealisierten Gleichungen beschreiben, z.B. Wasser, Öl, Luft; daher nennt man sie NEWTONsche Flüssigkeiten. Ölfarben, Schmelzen und viele andere Flüssigkeiten können nicht durch (Gl. 59) beschrieben werden und sind somit „nichtnewtonsche Flüssigkeiten“.

Die Proportionalitätskonstante η heißt dynamische Viskosität und ist eine für die Flüssigkeit charakteristische Größe. Die dynamische Viskosität η ist eine nur von Temperatur und Druck abhängige Stoffkonstante. Die Änderungen mit dem Druck ist bei Flüssigkeiten vernachlässigbar, dagegen nicht bei Gasen mit hohen Druckerhöhungen. Bei Gasen ergibt sich eine Abhängigkeit der Zähigkeit durch den Impulstransport der Moleküle. Bei Flüssigkeiten ist die Wechselwirkung der Molekularkräfte maßgebend, wobei eine freie Weglänge wie bei Gasen nicht vorliegt.

* s. a. Beispiel 6